



Convection naturelle MHD dans une cavité horizontale élançée

Laurent Davoust

► To cite this version:

Laurent Davoust. Convection naturelle MHD dans une cavité horizontale élançée. Electromagnétisme. INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE, 1996. Français. NNT: . tel-01340633

HAL Id: tel-01340633

<https://hal.science/tel-01340633>

Submitted on 1 Jul 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée par

Laurent DAVOUST

pour obtenir le titre de DOCTEUR

**de l'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE GRENOBLE**

(arrêté ministériel du 30 mars 1992)

Spécialité : Mécanique

CONVECTION NATURELLE MHD DANS UNE CAVITE HORIZONTALE ELANCEE

Date de soutenance : 25 Octobre 1996

Composition du jury :

M. E. HOPFINGER	Président
M. H. BEN HADID	Rapporteurs
M. M. D. COWLEY	
M. J.P. GARANDET	Examineurs
M. R. MOREAU	
M. B. ZAPPOLI	

Thèse préparée au sein du laboratoire EPM-MADYLAM
ENSHMG BP 95 - Rue de la piscine - Domaine universitaire - 38402 St Martin d'Hères

A mes parents,
A Magali.

La page

L'occasion se présente :

saisissons l'opportunité de faire des phrases longues, chaleureuses.

Je tiens à exprimer ma plus grande sympathie et reconnaissance pour deux personnages avec lesquelles j'ai eu le véritable plaisir - non dissimulé, je crois - de collaborer :

René MOREAU et Robert BOLCATO.

Leur volonté d'aider, de partager leur savoir-faire, bref, de travailler en équipe, ne peut être passée sous silence - leur contagieuse opiniâtreté non plus. J'ai ainsi baigné dans une atmosphère à la fois bienveillante et stimulante, où générosité et crédit m'étaient accordés.

L'équipée de joyeux drilles constituée :

de post-docs (Thierry, François, Peter et Vladimir),

de thésard(e)s (Denis, Jacques, Emmanuel, Pascal, Catherine, Anne-Catherine, Christophe, Jean-Pierre, Laurent, Eric, Béatrice, Cyril, June, Olivier),

de DEA (Alban, Sébastien),

ainsi que des permanent(e)s du laboratoire avec qui le courant est passé, n'est pas sans avoir participé à un certain bien-être et engouement quotidien à venir au labo : qu'ils en soient loués !

Il est hors de question que mes amis du laboratoire URPEI de l'École Polytechnique de Montréal soient oubliés. Je leur exprime ma gratitude et mon admiration pour la bonté qui les anime. Merci David, Francis, François, Nicolas, Philippe, Richard... Continuez à mettre du gaz dans votre char !

Hors de question également d'oublier Marie-Anne LE DAIN et Philippe VIOT, solidaires dans la tourmente comme dans la joie, avec lesquels je me suis habitué au plaisir d'enseigner.

Je remercie beaucoup les membres de mon jury acceptant gentiment de se concentrer sur l'examen de ce travail de thèse.

Finalement, pour le financement de mes trois années de recherches et enseignements, je tiens à remercier les citoyennes et citoyens de cette République pour leur effort financier.

Note Bene : Pardon à ceux qui s'estiment injustement oubliés. C'est une situation inévitable. Après tout, qu'ils se rassérènent, ce ne sont que mes remerciements.

Abstract

In the case of crystal growth from the melt, natural convection mainly controls heat and mass transfers within the liquid phase. As for micro-gravity, imposing a permanent magnetic field onto the melt is a quite efficient way to stabilise, to reorganise the buoyancy driven flow, and then to brake it. This braking effect leads to the idealised case where the transport of chemical species is essentially dominated by diffusion.

First, a review of the available knowledge on free convective flows, MHD or not, is proposed. Then, an experimental study, realised on the MASCOT set-up (MAGnetic Stabilisation of CONvection and Turbulence), puts in evidence the phenomena which govern the MHD buoyancy driven flow of mercury within a horizontal, large aspect ratio cylinder, submitted to both a uniform magnetic field and a horizontal temperature gradient. For this particular geometry, Hartmann layers are found to stay electrically inactive. The local influence of inertia is observed near the end walls of the cell and only when the level of convection is sufficiently high (large Grashoff number). Elsewhere, electric current and temperature distributions are strongly coupled, and this is illustrated by the balance between the curl of Laplace force and the curl of buoyancy force. This balance controls the flow for a modified Rayleigh number, say efficient, small enough. A 3-D numerical simulation of this laminar MHD buoyancy flow, based on Galerkin projections, yields some results in good agreement with the former experimental investigation.

Finally, transition to turbulence is studied with the MASCOT set-up. Three waves (either travelling or stationary waves) are clearly put in evidence during this transition. For a high level of convection, the detection of these time-dependent waves is found to depend on the presence of stationary instabilities which are themselves weakly time-dependent. The non-linear term of the energy equation forces a subcritical bifurcation. Finally, for low Grashoff number regimes, a Hopf supercritical bifurcation gives rise to chaos.

These results may give access to technological developments of the Bridgman crystal growth process. More generally, this progress in the understanding of MHD buoyancy driven convection may apply to other fields as metallurgy and tritigen blankets of the future thermonuclear fusion reactor.

NOMENCLATURE

Nous rappelons dans cette nomenclature, les notations communes aux cinq chapitres de ce mémoire. Certaines notations utilisées dans la rédaction de ce mémoire n'apparaissent pas dans cette nomenclature. Dans ce cas, elles sont spécifiques à chaque chapitre et sont alors définies dans le texte de manière systématique.

Caractéristiques physiques et variables

β	:	coefficient d'expansion volumique à pression constante
σ	:	conductivité électrique
μ	:	perméabilité magnétique du milieu considéré
ρ	:	masse volumique
α	:	diffusivité thermique
D	:	diffusivité chimique
ν	:	viscosité cinématique
R_0	:	rayon de la cavité
L	:	longueur de la cavité
x	:	vecteur directeur horizontal lié à l'axe principal X de la cavité
y	:	vecteur directeur horizontal lié à l'axe transverse Y de la cavité
z	:	vecteur directeur vertical lié à l'axe vertical Z de la cavité
U	:	composante axiale (horizontale) de la vitesse (suivant X)
V	:	composante transverse (horizontale) de la vitesse (suivant Y)
W	:	composante verticale de la vitesse (suivant Z)
u	:	vitesse
U	:	vitesse adimensionnée
J	:	densité de courant
J	:	densité de courant adimensionnée
g	:	gravité
ϕ	:	potentiel électrique
B_0	:	champ magnétique permanent imposé
φ	:	flux de chaleur
G	:	gradient axial de température dans le coeur de l'écoulement
T_1	:	température de l'extrémité froide
T_2	:	température de l'extrémité chaude
ΔT	:	écart de température entre les deux extrémités
T	:	température

θ	:	température adimensionnée, $\theta = \frac{T - T_1}{G R_o}$
$\delta\theta$:	écart de température adimensionné dans le coeur, $\delta\theta = \frac{T(90^\circ) - T(270^\circ)}{G R_o}$
$\Delta s T_1$:	saut de température à l'extrémité froide
$\tilde{\theta}$:	écart de température adimensionné, $\tilde{\theta} = \frac{T - T_1 - \Delta s T_1 - G X}{G R_o}$
d_{DSM}	:	diamètre de l'axe de la sonde mobile mixte (SMM) ou diamètre de l'axe de la double sonde mobile (SMB)

Nombres adimensionnels

Nombre de Grashof modifié	:	$Gr_G = \frac{\beta_g G r_o^4}{\nu^3}$
Nombre de Grashof	:	$Gr_{\Delta T} = \frac{\beta_g \Delta T R_o^4}{L \nu^3}$
Nombre de Hartmann	:	$Ha = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}} B_o R_o$
Nombre de Prandtl	:	$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$
Nombre de Prandtl magnétique	:	$Pr_m = \mu \sigma \nu$
Nombre de Schmidt	:	$Sc = \nu / D$
Nombre de Rayleigh modifié	:	$Ra_G = \frac{Pr Gr_G}{Ha^2}$
Nombre de Rayleigh	:	$Ra_{\Delta T} = \frac{Pr Gr_{\Delta T}}{Ha^2}$
Nombre de Rayleigh effectif	:	$Ra_2 = \frac{Pr Gr_G}{Ha^2 - 1}$
Nombre de Reynolds magnétique	:	$Rm = \mu \sigma UL \ll 1$
Nombre de Reynolds	:	$Re = \frac{U R_o}{\nu}$
Paramètre d'interaction	:	$N = \frac{Re}{Ha^2}$
Nombre de Nusselt	:	$Nu = \frac{\Phi}{\Delta T / L}$
Nombre de Hartmann	:	$ha = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}} B_o d_{DSM}$
Nombre de Reynolds	:	$re = \frac{U d_{DSM}}{\nu}$

INTRODUCTION.....	1
-------------------	---

CHAPITRE I. Convection naturelle dans les cavités en présence d'un champ magnétique uniforme

1.Introduction	7
2.Configuration G-H sans champ magnétique imposé.....	9
2.1.Configuration bidimensionnelle G-H : position du problème.....	10
2.2.Nombre de Prandtl Pr , nombre de Rayleigh Ra_H	12
2.2.1.Fluide à grand nombre de Prandtl : $Pr > 1$	13
2.2.2.Fluide à faible nombre de Prandtl : $Pr \ll 1$	13
2.3.Convection naturelle dans les configurations G-H : les différents régimes ..	15
2.3.1.Régime de coeur, régime de couches limites	15
2.3.2.Elancement ε , et nombre de Boussinesq (Pr, Ra_H).....	15
2.3.2.1.Cas des cavités élancées verticalement : $\varepsilon > 1$	16
2.3.2.2.Cas des cavités élancées horizontalement : $\varepsilon < 1$	17
2.3.3.Conclusions principales.....	18
2.4.Illustrations par la littérature	19
2.4.1.Cavité de Gill [1966].....	19
2.4.2.Cavité élancée de Cormack et al [1974].....	20
2.5.Cas des fluides de faible nombre de Prandtl : rôle du nombre de Grashoff Gr_H	21
2.6.Conclusions.....	22
3.Convection thermogravitaire MHD dans une configuration G-H.....	23
3.1.Position du problème	23
3.1.1.Le problème MHD.....	24
3.1.2.Couplage avec l'équation de l'énergie.....	30
3.2.Importance du circuit électrique.....	30
3.2.1.Etude 2-D	31
3.2.2.Etudes 3-D, importance du circuit électrique	35
3.2.3.Conclusions	43
3.3.Ecoulement dans un cylindre, régime thermique I ou II	43
3.3.1.Nombre de Rayleigh modifié.....	44
3.3.2.Etude analytique développée par Cowley [1994] : principales étapes, principaux résultats	45
3.4.Régimes thermiques : conjectures	51
4.Conclusion.....	54

CHAPITRE II. Expérience MASCOT : matériel, méthodes et mesures pour l'investigation de l'écoulement stationnaire

1.Introduction.....	57
2.L'expérience MASCOT.....	59
2.1.Configuration Bridgman horizontale.....	59
2.2.Présentation générale de l'expérience.....	59
2.3.Précautions expérimentales	62
2.3.1.Conditions aux limites thermiques.....	62
2.3.2.Champ magnétique	63
2.3.3.Conception de la cellule	65
2.3.3.Remplissage de la cellule par le mercure.....	66
2.4.Caractéristiques physiques du mercure.....	66
3.Instrumentation	67
3.1.Sondes pariétales.....	67
3.1.1.Traitement chimique et contact électrique	69
3.1.2.Mesure des températures.....	69
3.1.2.Mesure des potentiels électriques	71
3.2.Sonde mobile mixte (SMM)	74
3.2.1.Description.....	74
3.2.2.Principe des mesures.....	75
3.2.3.Précautions expérimentales	76
3.3.Mesure globale des transferts de chaleur.....	78
3.3.1.Mesure différentielle.....	79
3.3.2.Nombre de Nusselt Nu_1	80
3.4.Acquisition des potentiels électriques.....	81
4.Conclusion	82

CHAPITRE III Investigation expérimentale d'un écoulement stationnaire MHD dans une configuration G-H élanée

1.Introduction	83
2.Propriétés générales de l'écoulement.....	85
2.1.Distributions pariétales de température le long du cylindre.....	86
2.1.1.Définition de l'écart de température $\Theta(X, Y, Z)$	86
2.1.2.Effets tridimensionnels dans la zone hors-cœur	90
2.2.Distribution de température autour du cercle central	91
2.3.Différence de potentiels électriques au centre, ordre de grandeur du champ de vitesse axial.....	93
3.Du régime thermique III au régime thermique II.....	95
3.1.Rappels théoriques sur l'écoulement MHD de couches limites dans le cœur (Cowley [1993])	95
3.2.Développement asymptotique à l'ordre $O(Ra_G^3)$ pour la température dans le cœur ($Ra_G \ll 1$)	96
3.3.Transition vers un régime thermique II.....	99
3.3.1.Loix d'échelle pour la température autour du cercle.....	99
3.3.2.Distributions de température le long du cylindre	101
3.3.3.Distribution du potentiel électrique le long de la partie supérieure de la cellule	105
4.Transferts de chaleur.....	112
4.1.Evaluation du nombre de Nusselt Nu_2	113
4.2.Evaluation du nombre de Nusselt Nu	113
4.3.Evolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh modifié Ra_G	114
5.Conclusion	115

CHAPITRE IV. Simulation numérique 3D de l'écoulement thermogravitaire MHD dans une cavité horizontale faiblement élançée

1.Introduction	117
2.Configuration G-H étudiée, formulation mathématique	119
3. Méthodes numériques et maillage.....	122
3.1.Problème numérique.....	122
3.2.Rappels sur la méthode des éléments finis (MEF) appliquée à l'étude des écoulements.....	123
3.3.Algorithmes.....	124
3.3.1.Algorithme d'Uzawa	124
3.3.2.Algorithme d'Arrow-Hurwicz modifié.....	125
3.3.3.Algorithme d'Uzawa incomplet.....	126
3.4.Maillage	126
3.4.1.Ecoulement dans une configuration G-H parallélépipédique	128
3.4.2.Choix d'un élément $P_2^+-P_1$ pour l'approximation des champs de vitesse et de pression.....	128
3.4.3.Sensibilité de la solution au maillage (réalisé sur IDEAS V.6 de SDRCTM).....	129
3.5.Critère de convergence et coût des simulations.....	130
4.Résultats.....	131
4.1.Coeur de l'écoulement.....	132
4.2.Ecoulement hors coeur	132
4.2.1.Phénomènes typiques	133
4.2.2.Interprétations	134
5.Conclusion	141

CHAPITRE V. Transition vers la turbulence pour un écoulement thermogravitaire M H D

1.Introduction	151
2.Etudes antérieures	153
2.1.Travaux de Hurle et al [1974]	153
2.2.Travaux de Pratte and Hart [1990]	154
2.3.Théories linéaires de stabilité en présence d'un champ magnétique	156
3.Modifications du système expérimental	157
et traitement des signaux	157
3.1.Présentation des capteurs de température	157
3.2.Autres précautions expérimentales	160
3.3.Chainé de mesures, acquisition et traitement de l'information	161
3.3.1.Chainé de mesures	161
3.3.2.Acquisition et traitement des signaux	161
4. Résultats expérimentaux	166
4.1.Résultats généraux	166
4.2.Résultats expérimentaux observés pour tous nombres de Grashoff	168
4.3.Caractérisation de la première instabilité oscillante	171
4.3.1.Comment expliquer la présence de cette instabilité oscillante longitudinale 3-D ?	173
4.3.2.Influence sensible d'instabilités stationnaires pour des nombres de Grashoff plus importants Gr_{AT}	175
4.4.Diagramme de stabilité	180
4.4.1.Construction du diagramme	180
4.4.2.Analyse du diagramme de stabilité	181
4.5.Transition à nombre de Grashoff modéré	182
4.5.1.Etude de la transition à Gr_{L7K} : caractérisation par les ondes	184
4.5.1.1.Onde oscillante transversale	184
4.5.1.2.Une deuxième onde oscillante longitudinale de basse- fréquence	191
4.5.1.3.Présence anecdotique d'une sous-harmonique	194
4.5.2.Etude de la transition à Gr_{L7K} vers le chaos temporel	194
4.5.2.2.Le cas école de la convection Rayleigh-Bénard	197
4.5.2.3.Le cas de MASCOT	200
4.5.2.4.Bifurcation sur-critique de Hopf pour l'onde oscillante basse-fréquence	202
4.5.2.5.Emergence du chaos par déstabilisation d'un tore T^2 ...	203
5.Conclusion	207

CONCLUSION	209
-------------------------	------------

Annexe 1 Calculs des incertitudes relatives

1. Erreurs relatives sur les caractéristiques physiques.....	213
2. Incertitude sur le nombre de Hartmann.....	213
3. Incertitudes sur les nombres de Grashoff Gr_{AT} et Gr_G	214
4. Incertitudes relatives sur les nombres de Rayleigh Ra_{AT} et Ra_G	215
5. Incertitudes relatives sur les nombres de Nusselt.....	215
6. Incertitude relative sur la vitesse axiale U	216

Annexe 2 Justifications des modifications apportées à l'expérience MASCOT dans le cadre de l'investigation expérimentale de la transition vers la turbulence

1. Variation du flux de B_θ	217
2. La double sonde mobile : obstacle électrique, thermo-électrique ?.....	218
3. Présence d'ondes d'Alfvén ?.....	220

Références bibliographiques	223
--	------------

INTRODUCTION

Aujourd'hui, des secteurs industriels importants tels que la micro-électronique, l'instrumentation, ou la production d'électricité à partir de l'énergie solaire (cellules photovoltaïques), ressentent de manière aiguë le besoin de disposer de monocristaux semi-conducteurs de qualité contrôlée. Parmi les enjeux imaginables, citons la synthèse de composants électroniques de meilleure qualité pour la conception des ordinateurs de demain. Ces composants électroniques sont, par exemple, élaborés par épitaxie à partir de substrats cristallins constitués d'un monocristal semi-conducteur auquel est ajouté un dopant (constituant minoritaire) qui confère au matériau les propriétés électroniques désirées (voisines si possible de la caractéristique courant-tension idéale). Ces dernières années, le fait que la production annuelle de ces cristaux n'ait cessé d'augmenter illustre bien l'importance de ces technologies nouvelles.

La science des matériaux et surtout le domaine de la solidification, détiennent la plupart des outils permettant la mise en oeuvre des procédés de fabrication de ces cristaux. Parmi ces procédés, le plus couramment utilisé est la croissance cristalline à partir d'un bain fondu, autrement appelé phase liquide. A l'heure actuelle, trois procédés de cristallogénèse sont répandus : la technique Czochralski - la plus couramment utilisée - et les techniques de zone flottante et de Bridgman (Langlois [1985]). Leur dénominateur commun est l'importance accordée au contrôle de la concentration du dopant dans le cristal formé. En effet, parmi les différents critères de qualité retenus pour un cristal, la réduction d'éventuelles hétérogénéités de concentration dans le matériau en est un ; la réduction des défauts de l'arrangement cristallin en est un autre. Par conséquent, le fait de contrôler l'homogénéité du dopant dans la phase solide, donc dans la phase liquide au voisinage du front de solidification, se révèle être un objectif majeur. De même, aussi faible que soit la teneur en impuretés (oxygène...etc), il est impératif de veiller à ce qu'elle soit répartie aussi uniformément que possible. Du fait que ces espèces (dopant et impuretés) - regroupées sous le terme générique "soluté" - présentent généralement une solubilité dans la phase solide inférieure à celle dans la phase liquide, le front de solidification rejette en permanence une fraction de soluté. Si le fluide constituant la phase liquide demeurerait au repos, la diffusion étant le seul mécanisme de transfert du soluté, celui-ci se concentrerait dans une couche diffuse d'épaisseur le long du front uniforme D/V où D et V désignent, respectivement, la diffusivité chimique du soluté dans la phase liquide (de l'ordre de 10^{-9} m²/s) et la vitesse d'avancement du front (de l'ordre de 10^{-5} m/s). L'uniformité de l'épaisseur D/V garantirait donc l'absence de toute ségrégation transversale, c'est à dire toute variation de concentration dans un clivage cristallin orthogonal à la direction de solidification. En fait, le gradient de température, inévitable en solidification, engendre des variations de densité qui induisent à leur tour un écoulement de convection naturelle. Celui-ci, même très faible, est largement suffisant pour bouleverser la distribution de soluté au voisinage du front de

solidification. Ce mouvement engendre des défauts qui se manifestent par exemple par des striations bien visibles, apparaissant sous la forme de bandes plus foncées ou plus claires, et identifiables comme des zones de concentration différentes en dopant (Utech and Flemings [1966]).

Les techniques de Czochralski et de zone flottante ont en commun le fait que le substrat est fabriqué à partir d'un germe monocristallin mis en contact avec la phase liquide et le fait qu'elles offrent une surface libre avec l'atmosphère provoquant en plus de l'écoulement de convection naturelle, un écoulement de convection thermocapillaire. Malgré le nombre de phénomènes physiques en jeux, le principal intérêt de ces méthodes est pratique : la pollution du substrat par contact avec les parois est limitée. *A priori*, la technique Bridgman apparaît plus simple car seule la convection naturelle est le processus générateur de ségrégations solutales. Une cavité fermée contient d'une part un bain fondu, d'autre part un germe cristallin tenant le rôle de phase solide initiale au début de la solidification. Le processus de solidification est ensuite réalisé par déplacement de la cavité dans un gradient de température G . Puisque la convection naturelle est d'origine essentiellement thermogravitaire, seul le rotationnel de la force de flottabilité (produit vectoriel du gradient de température par l'accélération de la pesanteur) est responsable des mouvements dans la phase liquide. On comprend donc que si le gradient de température G imposé est vertical (technique de Bridgman verticale), seuls les gradients résiduels de température, horizontaux et liés à la courbure du front, sont capables d'engendrer de la convection naturelle : cette configuration est donc l'objet de mouvements convectifs très faibles. Cependant, le signe de ces gradients, très dépendant de la forme du front de solidification, est relativement incontrôlable et le mouvement qui en résulte, demeure bien souvent imprévisible.

En revanche, la configuration Bridgman horizontale a ceci de particulier que le repos est impossible en présence d'une gravité g non nulle. Mais, à la différence de la configuration verticale, le mouvement engendré par le couple moteur proportionnel à $G \times g$, est organisé et prévisible. Sous réserve que le dopant soit suffisamment dilué, le couplage avec les transferts de masse est affaibli (la concentration en soluté se comporte comme un scalaire passif) et la modélisation est possible (Garandet *et al* [1990], Garandet *et al* [1991]). Dans la configuration Bridgman horizontale, le défi (et non le moindre) consiste à freiner suffisamment le champ de vitesse pour réduire la ségrégation à des valeurs admissibles.

La microgravité est un moyen efficace pour diminuer le niveau de convection en intervenant directement sur l'intensité de la pesanteur (donc sur le module de la force de flottabilité). Les expériences de solidification dans l'espace restent cependant onéreuses. En outre, les valeurs résiduelles de la gravité (10^{-5} à 10^{-4} g), de direction aléatoire, en particulier transverse à la direction de solidification, suffisent à entretenir un faible niveau de convection naturelle.

Un autre procédé consiste à imposer un champ magnétique permanent sur la phase liquide électroconductrice (semi-conducteur). Ce champ fait apparaître une force de Laplace qui a pour effet de stabiliser l'écoulement, de le réorganiser, puis de le freiner. Mais en retour, un effort de recherche conséquent doit être produit afin d'accéder à la connaissance de la nouvelle organisation de cet écoulement MHD d'origine thermogravitaire ; en effet, dans ce contexte de couplage avec les transferts de masse, le champ de vitesse est une donnée essentielle dans le contrôle de la ségrégation.

Historiquement, la première étude d'un écoulement de convection naturelle sous champ magnétique remonte aux années 60 avec un modèle analytique pionnier (Lykoudis [1962]) pour l'écoulement d'un métal liquide le long d'une plaque plane chaude sous champ magnétique transverse. Puis, après les nombreuses recherches portant sur les écoulements MHD en conduite à gradients de pression imposés (Hunt and Shercliff [1975]), l'importance du circuit électrique dans le contrôle des écoulements MHD, autrement dit l'importance du point de vue 3-D a été reconnue. Plus récemment, de récentes modélisations analytiques (Alboussière *et al* [1993], Cowley [1994], Neubrand *et al* [1995]) et numériques (Ben Hadid and Henry [1994]) ont vu le jour avec la prise en compte à la fois du circuit électrique et de la force volumique rotationnelle qu'est la force de flottabilité. Toutes ces études s'accordent en soulignant l'importance clef de la géométrie de la cavité impliquée, de la direction et de l'uniformité du champ magnétique appliqué. C'est la direction du champ magnétique parallèle à la gravité qui freine le plus efficacement l'écoulement. Ces études ont vu le jour grâce à l'aide du CNES (division Fluides et Matériaux en Micro gravité), et sont le fruit d'une collaboration entre les équipes des trois laboratoires suivants :

1. le laboratoire EPM-MADYLAM (CNRS, INP-Grenoble) avec René Moreau, Robert Bolcato et Thierry Alboussière,
2. le CEA/CEREM/DEM/SESC (Avenue des Martyrs, Grenoble) avec Jean-Paul Garandet et Anne-Catherine Neubrand,
3. et le Laboratoire de Mécanique des Fluides et Acoustique (CNRS, Ecole Centrale de Lyon) avec Hamda Ben Hadid et Daniel Henry.

C'est dans ce contexte de collaboration scientifique que s'insère ce travail de thèse réalisé au laboratoire EPM-MADYLAM sous la direction du Professeur René MOREAU.

Du point de vue technique, en similitude avec la phase liquide d'une croissance cristalline Bridgman horizontale, une expérience sophistiquée, impliquant une cellule horizontalement élançée est conçue puis mise en place : l'expérience MASCOT (*Magnetic Stabilisation of Convection and Turbulence*). L'écoulement de convection naturelle MHD dans une cavité horizontale élançée, soumis à un champ magnétique permanent et vertical, est étudié

ainsi que sa transition vers la turbulence (lorsque l'intensité du champ magnétique s'abaisse en-dessous d'un seuil critique). Plus généralement, ce type de configuration soumise à un écart de température entre ses deux extrémités est désigné, à partir de maintenant, par l'appellation "configuration G-H" (Gradient Horizontal) qui insiste sur le point fondamental que le gradient de température imposé est horizontal.

Le premier chapitre de ce mémoire poursuit plusieurs objectifs. Nous présentons de brefs rappels sur la convection naturelle des fluides en cavités, puis présentons les éléments importants contenus dans la littérature (plutôt récente) vouée à la convection naturelle MHD. Mais ce chapitre n'a pas pour seule vocation de dresser un bilan bibliographique. Nous espérons, via l'analyse de quelques illustrations pertinentes disponibles dans la littérature, et quitte à mener quelques calculs en termes d'ordres de grandeur, porter l'attention du lecteur sur les trois aspects essentiels suivants :

1. la direction (par rapport à la gravité) et la valeur de l'éclatement de la cavité, exercent une influence notable sur la nature de l'écoulement,
2. la géométrie du circuit électrique, déterminée au moins partiellement par la forme de la cavité ainsi que par l'uniformité du champ magnétique appliqué, fixe les lois d'échelles gouvernant le champ de vitesse,
3. finalement, l'importance du circuit électrique susmentionné, impose qu'un point de vue 3-D est toujours nécessaire pour traiter ces écoulements de convection naturelle MHD. Dans quelques cas rares, il appert, après une analyse du problème (menée de toute façon avec un point de vue 3-D), qu'une modélisation 2-D est possible.

Le chapitre II est consacré à la présentation de l'expérience MASCOT et des idées qui ont justifié les choix menant à sa conception. L'instrumentation développée sur cette expérience, à la fois globale et locale, est aussi décrite : nous insistons notamment sur les stratégies adoptées en vue de s'affranchir d'une pollution potentielle de nos mesures par des phénomènes thermoélectriques liés aux capteurs. Ce chapitre nous semble important dans la mesure où il est une illustration de nos efforts pour converger vers des mesures univoques, directement comparables avec des pronostics analytiques ou numériques à valider.

Après les rappels théoriques du chapitre I et la présentation de l'expérience MASCOT au chapitre II, le chapitre III, consacré à l'investigation expérimentale de l'écoulement thermogravitaire MHD **stationnaire**, est une suite naturelle. Cette investigation débouche sur la mise en évidence de deux types de régimes, l'un où le rôle intermédiaire de l'inertie suffit à bouleverser le champ de vitesse aux extrémités de la cavité, l'autre où l'équilibre entre le couple moteur de flottabilité et le couple dissipatif magnétique (rotationnel de la force de Laplace) pilote l'écoulement.

Pour ce dernier type d'écoulement thermogravitaire, déjà stabilisé et réorganisé sous l'influence d'effets magnétohydrodynamiques, une simulation numérique 3-D réalisée à partir de modifications réalisées sur le code POLY3D™, apporte une confirmation satisfaisante de nos résultats expérimentaux ainsi qu'un complément indispensable. Le chapitre IV de ce mémoire est donc consacré à la présentation de la configuration G-H étudiée, du modèle mathématique adopté, à résoudre numériquement, et des méthodes numériques adaptées à ce contexte 3-D. Il se termine par la présentation des résultats de ces simulations. Une place importante est accordée à l'interprétation physique de ces résultats avec une analyse du couplage entre les champs de vitesse, de température et du potentiel électrique. Le code POLY3D™, développé par le laboratoire URPEI (Chaire Paprican-CRSNG de l'Ecole Polytechnique de Montréal), est disponible à Montréal. Les modifications réalisées sur ce code afin de prendre en compte le circuit électrique sont le fruit d'une collaboration avec le Professeur Philippe Tanguy (directeur de ce laboratoire), et deux chercheurs : Messieurs Francois Bertrand et Francis Thibault.

Ce mémoire se termine par l'investigation expérimentale de la transition vers la turbulence pour l'écoulement thermogravitaire MHD au sein de l'expérience MASCOT (chapitre V). Nous notons notamment la présence d'oscillations, du même type que celles qui donnent lieu à des striations en croissance cristalline, avant l'avènement de la turbulence diagnostiquée par des signaux de température aperiodiques. Une caractérisation de ces oscillations par des ondes ainsi qu'une étude plus fondamentale de la transition vers le chaos temporel (lorsque le niveau de convection est suffisamment modéré), sont notamment proposées dans ce chapitre.

Nous terminons cette introduction en mentionnant qu'à l'heure actuelle, les applications de cette étude concernent certes la croissance cristalline, mais également le champ plus diversifié des transferts de chaleur dans les écoulements de convection naturelle MHD en cavité. Une des applications qui nous semble la plus prometteuse, concerne l'étude des transferts de chaleur dans la couverture tritigène au lithium-plomb des futurs réacteurs de fusion thermonucléaire (projet ITER). Ce problème relève de la convection naturelle MHD puisqu'un champ magnétique intense (poloidal et surtout toroidal) consistant à confiner le plasma (source d'énergie), est présent.

CHAPITRE I

Convection naturelle dans les cavités en présence d'un champ magnétique uniforme

Quelques rappels essentiels sur la convection naturelle dans les cavités bidimensionnelles sont présentés. Par une analyse des ordres de grandeur, il est rappelé que les nombres adimensionnels de Rayleigh, de Grashoff, ainsi que la valeur et la direction de l'éclatement de la cavité sont les paramètres à considérer. Lorsqu'un champ magnétique uniforme et permanent est appliqué, des comportements typiquement MHD sont mis en évidence à l'aide de quelques études analytiques, numériques et expérimentales disponibles dans la littérature. Une organisation MHD de l'écoulement, avec un cœur, des couches de Hartmann et des couches parallèles est présente. Le nombre de Rayleigh modifié Ra_G , mis en évidence par Cowley [1994], s'exprimant comme le rapport du nombre de Rayleigh classique au carré du nombre de Hartmann Ha , est le paramètre clef du problème MHD. L'importance du circuit électrique est mise en évidence par l'analyse de quelques cas bibliographiques. Le calcul analytique 3-D de l'écoulement thermogravitaire MHD à faible nombre de Rayleigh modifié, mené par Cowley [1994] pour une cavité cylindrique, est présenté. Nous insistons notamment sur la cohérence entre les cartes de température, du champ de vitesse et du circuit électrique obtenues par l'auteur.

1. Introduction

Au cours des quatre dernières décennies, un intérêt croissant s'est manifesté pour l'étude des écoulements de convection naturelle engendrés par des gradients de température (écoulement thermogravitaire), des gradients de soluté (écoulement solutogravitaire), ou bien encore, des gradients de température et de soluté (écoulement thermosolutal). Cet intérêt se mesure par l'importance de la littérature sur ce sujet (cf. condensé de Ostrach [1988]) et se justifie par la diversité des configurations tant scientifiques qu'industrielles. Parmi les diverses applications scientifiques, citons par exemple la géodynamo dans le noyau liquide de la Terre (convection thermosolutale), la météorologie et la combustion (convection thermosolutale), domaines dans lesquels vient se greffer la turbulence. Pour les applications industrielles, les systèmes thermohydrauliques ou bien la croissance des cristaux à partir de bains fondus sont des exemples typiques.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux écoulements thermogravitaires dans les cavités différentiellement chauffées où le gradient de température, source du mouvement, est horizontal. Cette configuration est désignée à partir de maintenant par l'abréviation G-H (gradient horizontal). Pour les métaux liquides, cet écoulement qui a déjà fait l'objet de travaux variés dans la dernière décennie demeure un sujet de recherche d'actualité. Cette constatation est encore plus justifiée lorsqu'un champ magnétique uniforme est appliqué à la configuration G-H ; dans ce dernier cas, la littérature recèle peu d'informations.

La première étude consacrée à la convection thermogravitaire sous champ magnétique remonte au début des années 60 avec Lykoudis [1962]. L'auteur s'est concentré sur l'écoulement 2-D de convection naturelle le long d'une plaque plane chaude verticale et infinie plongée dans un bain de métal liquide plus froid et soumis à un champ magnétique transverse. Cette étude reste cependant relativement idéalisée puisque le confinement du métal liquide, inévitable et toujours important en MHD, est supposé absent.

Il faut attendre la simulation numérique 3-D d'Ozoe and Okada [1989] menée dans le cas d'un cube. Un champ magnétique uniforme est orienté dans l'une des trois directions principales du cube. Ces auteurs constatent que le freinage de l'écoulement est optimisé lorsque le champ magnétique est vertical sans en proposer une interprétation magnétohydrodynamique (notée MHD, par la suite).

Comme pour le cas des écoulements MHD en conduite (Hunt and Shercliff [1971]), la géométrie du circuit électrique détermine l'ordre de grandeur du champ de vitesse des écoulements thermogravitaires MHD. Alboussière *et al* [1993] ainsi que Cowley [1994] montrent que la prédiction d'un écoulement thermogravitaire MHD, dans une configuration G-H, est indissociable de l'étude de l'activité électrique des couches de Hartmann. Les simulations numériques 3-D de Ben Hadid and Henry [1994] menées sur des cavités parallélépipédiques en apportent la confirmation.

Ce chapitre est bâti selon la démarche suivante. Dans un premier temps, nous rappelons les propriétés essentielles de la convection naturelle SANS champ magnétique mises en évidence ces dernières décennies dans les cavités G-H bidimensionnelles. Nous rappelons notamment comment l'élancement de la cavité ainsi que sa direction par rapport à la gravité conditionne l'écoulement thermogravitaire. Dans un deuxième temps, nous effectuons des rappels sur l'organisation MHD de l'écoulement et sur les mécanismes qui la contrôlent : l'importance du circuit électrique est présentée de manière simple avec une analyse des ordres de grandeur. Puis avec le support de quelques exemples fournis par la bibliographie, nous mettons en évidence les raisons pour lesquelles un écoulement de convection naturelle MHD ne peut pas être étudié avec un point de vue uniquement bidimensionnel. Finalement, ce chapitre conclut sur l'étude analytique 3-D complète menée par Cowley [1994] pour le cas de l'écoulement thermogravitaire MHD d'un métal liquide dans un cylindre élané horizontal. De nombreux résultats prédits par cette étude analytique sont d'ailleurs confirmés par l'investigation expérimentale menée sur l'expérience MASCOT (chapitres II et III).

2. Configuration G-H sans champ magnétique imposé

La plupart des monographies consacrées à l'étude des transferts de chaleur par convection naturelle commencent par présenter le problème de la plaque plane verticale et infinie, de température T_2 , plongée dans un fluide ambiant de température T_1 . Dans les conditions réelles d'une expérience, le fluide est contenu dans un réservoir de plus ou moins grande extension : tout au plus, une grande salle d'expérimentation si le fluide invoqué est l'air. Par exemple, pour les métaux liquides, le problème de la plaque idéalement infinie et bi-dimensionnelle est modifié par les conditions intrinsèques de l'expérience : le réservoir délimitant l'expérience transforme cette étude en un problème d'écoulement de convection naturelle dans une cavité. En effet, considérons que la température de la plaque est plus élevée que celle du milieu ambiant, le fluide sous l'effet de la force de flottabilité est alors soumis à un mouvement ascendant. Par conservation de la masse et parce que le réservoir est d'extension finie, une recirculation est présente et décrit le cycle thermodynamique représenté sur la figure 1 suivante.

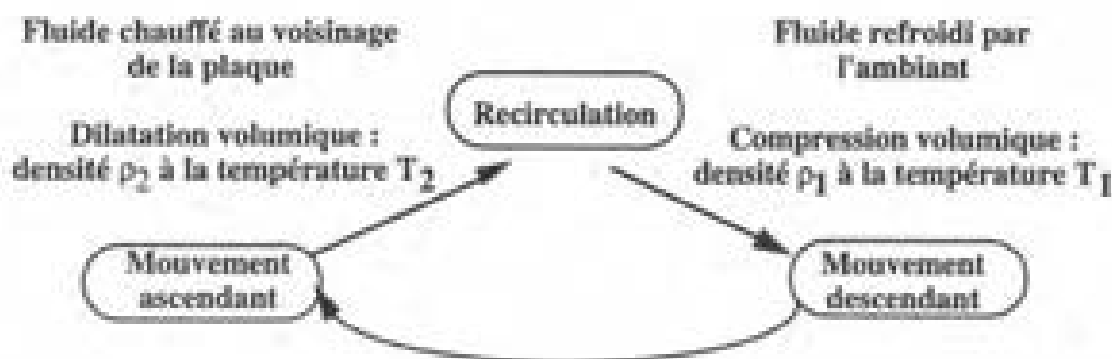


Figure 1.

Cette boucle de convection naturelle nous amène à présenter le problème plus réaliste de la convection naturelle en cavité en considérant l'étude des couches limites thermiques le long d'une paroi comme une région particulière de l'écoulement.

Si les gradients de température vus par le fluide n'induisent que des variations faibles de densité, un développement limité au premier ordre suivant la variable température est justifié et qualifié d'approximation de Boussinesq : $\rho = \rho_{ref} * (1 - \beta * (T - T_{ref}))$. La température T_{ref} est typiquement choisie parmi les températures qui restent constantes dans le problème de convection naturelle étudié.

2.1. Configuration bidimensionnelle G-H : position du problème

La configuration G-H étudiée est bidimensionnelle et remplie d'un fluide newtonien (figure 2). Les extrémités froide et chaude sont portées aux températures T_1 et T_2 et représentées, respectivement, à gauche et à droite par convention jusqu'à la fin de ce mémoire. Les parois supérieure et inférieure sont adiabatiques.

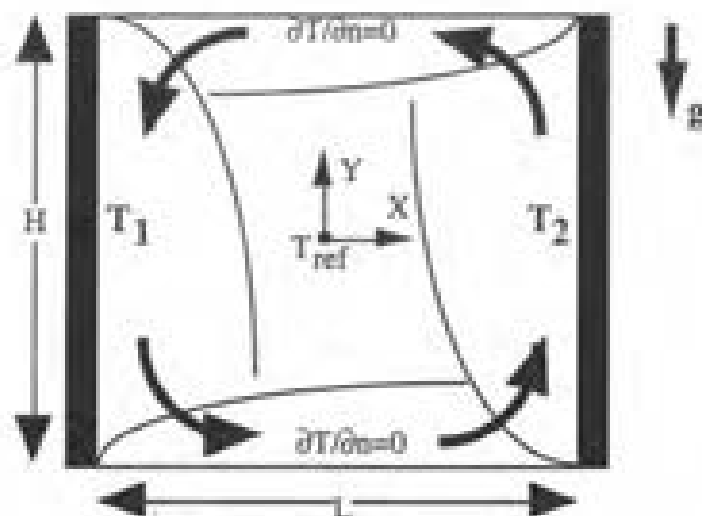


Figure 2.

La température de référence pour l'approximation de Boussinesq est à choisir parmi les trois températures constantes de ce problème : T_1 , T_2 et $T_c = (T_1 + T_2)/2$. Quel que soit l'éclatement de la cavité, ce problème est symétrique par rapport au centre de la cavité pour les variables scalaires température et pression, respectivement T et P , ainsi que pour le champ de vitesse $\mathbf{u} = (U, V)$. En effet, la géométrie, les conditions limites ainsi que le système d'équations aux dérivées partielles descriptifs de ce problème présentent une propriété de symétrie centrale par rapport au centre de la cavité à la température T_c (Gill [1966]). En conséquence, T_{ref} est choisie égale à la température au centre de la cavité : $T_{ref} = T_c$.

Pour la description de ce problème stationnaire, le système d'équations aux dérivées partielles s'écrit :

$$\text{Continuité} \quad \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Navier-Stokes} \quad & U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{-1}{\rho_{ref}} \frac{\partial P}{\partial X} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \\
 & U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{-1}{\rho_{ref}} \frac{\partial P}{\partial Y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + [g] \beta (T - T_{ref})
 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\text{Energie} \quad U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} \right) \quad (1.3)$$

Les variables α , β , ν , g et ρ_{ref} représentent la diffusivité thermique, la dilatation volumique, la viscosité moléculaire, la pesanteur et la densité à la température de référence.

L'énergie motrice de l'écoulement vient de la force de flottabilité. La dissipation de l'énergie motrice est due à la viscosité (traînée visqueuse). Les forces d'inertie et de pression assurent le relais entre production et dissipation. Ce rôle de maillon joué par la pression permet d'adopter le raisonnement qualitatif suivant : la force de flottabilité est partiellement équilibrée par un gradient de pression adverse, vertical au voisinage des extrémités gauches et droites de la cavité (figure 2). Ce gradient de pression adverse est orienté suivant $+Y$ ou $-Y$ selon que l'extrémité est à la température T_2 ou la température T_1 ($T_2 > T_1$). Par suite, un gradient de pression axial s'installe et s'oriente suivant $+X$ ou $-X$ selon que l'on se situe dans la partie supérieure ou inférieure de la cavité. Cette distribution de pression crée une circulation principale, appelée depuis très longtemps : circulation de Hadley (1735). Ce rôle intermédiaire de la pression peut être mis de côté en prenant le rotationnel des équations de Navier-Stokes. On aboutit à l'équation du tourbillon projetée sur la normale au plan (X, Y) .

$$\begin{aligned}
 \text{Tourbillon} \quad & \frac{\partial}{\partial X} \left(U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left(U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} \right) \quad (\text{Inertie}) \\
 & = \nu \left[\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \right] + [g] \beta \frac{\partial T}{\partial X} \quad (1.2\text{-bis}) \\
 & \quad \quad \quad (\text{frottement visqueux}) \quad \quad \quad (\text{flottabilité})
 \end{aligned}$$

2.2. Nombre de Prandtl Pr , nombre de Rayleigh Ra_H

Prenons l'exemple du développement de la couche limite thermique qui jouxte l'extrémité chaude de température T_2 . Afin de mettre en évidence les nombres adimensionnels caractéristiques de cette étude, les équations (I.2-bis) et (I.3) sont réécrites en termes d'ordres de grandeur pour l'abscisse X , l'ordonnée Y , la température T , et la composante verticale de la vitesse. Ces ordres de grandeur sont basés sur les échelles caractéristiques δ_t , H , $\Delta T (=T_2-T_1)$ et V désignant respectivement l'épaisseur de la couche limite thermique, la hauteur de la cavité, l'écart de température imposé et l'ordre de grandeur de la composante verticale de la vitesse. L'ordre de grandeur de la composante horizontale de la vitesse s'exprime en fonction de V via l'équation de conservation de la masse (I.1).

$$\left(\frac{V^2}{H \delta_t} \right) - \left(\frac{V^2}{H^3 / \delta_t} \right) =$$

(inertie)

Tourbillon

$$u \left(\frac{V}{\delta_t} + \frac{V}{H \delta_t} + \frac{V}{H^2 \delta_t} + \frac{V}{H^4 / \delta_t} \right) + \frac{1}{2} \beta \frac{\Delta T}{\delta_t}$$

(frottement visqueux) (flottabilité)

Energie

$$\frac{V \Delta T}{H} = \alpha \left(\frac{\Delta T}{\delta_t^2} + \frac{\Delta T}{H^2} \right)$$

(convection) (conduction)

La conservation de la masse (équation I.1) est implicitement utilisée pour exprimer l'ordre de grandeur de la composante horizontale de la vitesse U , comme $V \delta_t / H$. L'hypothèse que l'épaisseur de la couche limite thermique δ_t est très faible par rapport à la hauteur de la cavité H , (à vérifier *a posteriori*) conduit à la relation :

$$\left(\frac{V^2}{H \beta g \Delta T} \right) = \left(\frac{u V}{\beta g \Delta T \delta_t^2} \right) + 1$$

avec

$$\delta_t = (\alpha H / V)^{1/2}$$

(I.2)'

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{H}{\delta_t} \right)^4 Ra_H^{-1} Pr^{-1} = \left(\frac{H}{\delta_t} \right)^4 Ra_H^{-1} + 1$$

(inertie) (frottement visqueux) (flottabilité). (I.2)''

De cette dernière équation, sortent les expressions des nombres de Rayleigh Ra_H , et de Prandtl Pr , respectivement définis par : $Ra_H = g\beta\Delta T H^3 / \nu \alpha$ et $Pr = \nu / \alpha$. Le nombre de Rayleigh Ra_H , donne accès à une mesure de l'intensité de la convection. Il représente le rapport entre le couple moteur lié à la flottabilité et un couple antagoniste. Ce couple antagoniste résulte de l'action combinée des diffusivités thermique et cinématique. La signification physique du nombre de Prandtl, hormis le fait qu'il caractérise un fluide donné, peut être comprise comme une mesure du rapport des capacités du fluide à diffuser la quantité de mouvement (par la viscosité moléculaire) et la chaleur (par la diffusivité thermique). L'équation (1.2)' obtenue ci-dessus, montre clairement deux équilibres possibles selon que Pr est grand ou petit devant l'unité.

2.2.1. Fluide à grand nombre de Prandtl : $Pr > 1$

L'équilibre entre la flottabilité et le frottement visqueux est prépondérant dans la couche limite thermique. Sous l'effet de cet équilibre, le fluide mis en mouvement s'écoule à la vitesse V , principalement verticale. Au delà des limites de la couche limite thermique, d'épaisseur δ_t , le fluide est soumis à l'entraînement par frottement visqueux et freiné par inertie. On peut ainsi définir cette couche de fluide entraîné comme une couche visqueuse d'épaisseur δ_v , plus importante que δ_t , et qui ne peut être confondue avec une couche limite cinématique classique se développant par exemple dans le cadre d'un écoulement de Blasius. L'équation (1.2)' permet d'obtenir les ordres de grandeur suivants pour l'épaisseur de la couche limite thermique et la vitesse d'entraînement :

$$\delta_t = H Ra_H^{-1/4} \quad \text{et} \quad V = (\alpha/H) Ra_H^{1/2},$$

ainsi que l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche visqueuse δ_v :

$$\delta_v = H Pr^{1/2} Ra_H^{-1/4}.$$

2.2.2. Fluide à faible nombre de Prandtl : $Pr \ll 1$

Dans ce cas, c'est l'équilibre entre la flottabilité et l'inertie qui domine dans la couche limite thermique. Partout où la température diffuse, une vitesse verticale V , est créée par flottabilité. Par suite, il est possible de définir l'épaisseur δ_{TE} d'une couche de fluide entraînée à la vitesse V sous l'effet de la force de flottabilité : l'ordre de grandeur de δ_{TE} est celui de δ_t . Suivant la même démarche que ci-dessus, ces ordres de grandeur sont déterminés :

$$\delta_t = \delta_{TE} = H (Pr Ra_H)^{-1/4} \quad \text{et} \quad V = (\alpha/H) (Pr Ra_H)^{1/2}.$$

Cependant, tout près de la paroi, la vitesse tend asymptotiquement par adhérence vers la vitesse de la paroi (souvent nulle pour les écoulements thermogravitaires en cavités) et les dérivées associées aux contraintes visqueuses finissent par devenir non négligeables. En conséquence, on définit une couche limite visqueuse, d'épaisseur δ_v , à l'intérieur de laquelle l'équilibre entre flottabilité et l'entraînement visqueux domine. L'ordre de grandeur de cette épaisseur est faible ($Pr^{-1/2}$ fois plus faible) devant δ_i et δ_{TE} .

$$\delta_v \sim H Gr_H^{-1/4}$$

Cette sous-couche possède cette fois la même propriété qu'une couche limite cinématique au sens où elle permet le raccordement asymptotique à la paroi du champ de vitesse lié à l'écoulement potentiel externe. Un autre nombre adimensionnel apparaît dans cette dernière relation, le nombre de Grashoff, noté Gr_H , et qui s'écrit explicitement : $Gr_H = (g \beta \Delta T H^3) / \nu^2$. Pour les fluides de faible nombre de Prandtl, le nombre de Reynolds vaut exactement la racine du nombre de Grashoff. Autrement dit, la même signification que celle du nombre de Reynolds peut être affectée à la racine du nombre de Grashoff.

La figure 3 ci-dessous présente un schéma-résumé de l'organisation typique des couches limites en fonction du nombre de Prandtl.

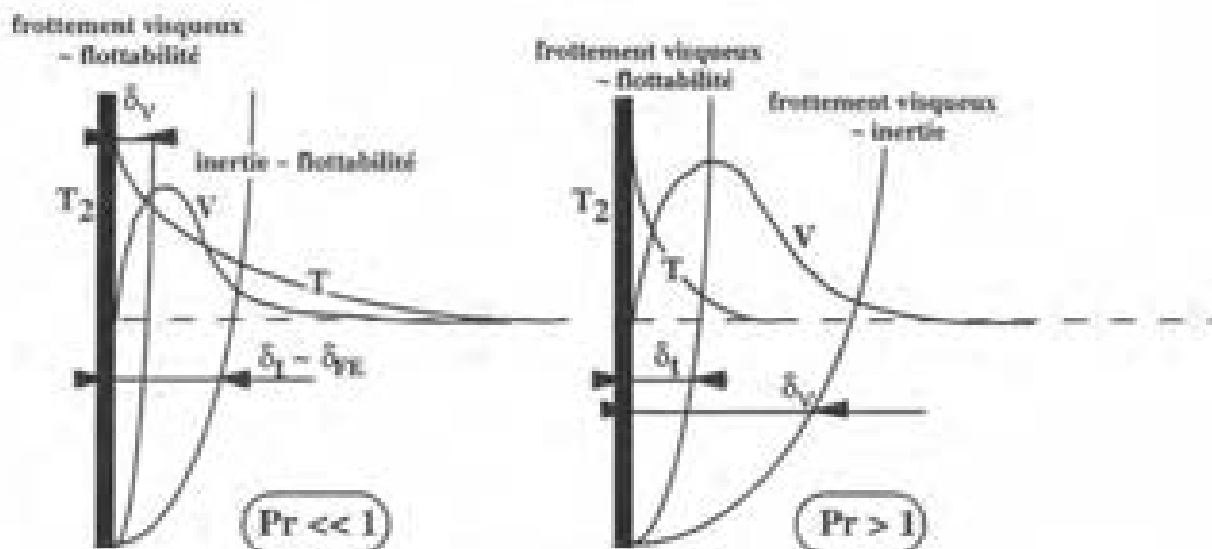


Figure 3.

2.3. Convection naturelle dans les configurations G-H : les différents régimes

La présentation suivante s'appuie partiellement sur la littérature spécialisée, Bejan [1994], ainsi que sur deux cas spécifiques étudiés par Gill [1966] et Cormack *et al* [1974].

Les paramètres importants dans cette étude sont le nombre de Rayleigh et l'élanement ε , par sa direction et sa valeur. L'élanement ε , est défini comme le rapport de la hauteur de la cavité H , à sa largeur L . Contrairement à la configuration Rayleigh-Bénard, dans le cas de la configuration G-H, quelle que soit la différence de température imposée entre les deux murs verticaux $\Delta T (= T_2 - T_1)$, la circulation de Hadley est toujours présente.

2.3.1. Régime de coeur, régime de couches limites

Compte-tenu de la symétrie centrale déjà mentionnée (Gill[1966]), la température du centre de la cavité est $T_{\text{ref}} = 1/2 (T_2 - T_1)$. Par suite, deux couches limites thermiques se développent le long des extrémités chaude et froide de la cavité et deux autres couches limites thermiques se développent le long des murs adiabatiques supérieur et inférieur de la cavité. Le coeur de l'écoulement qualifie la région centrale de la cavité. La dénomination "régime de coeur" définit la situation où deux couches limites thermiques présentent une zone d'intersection. Cette intersection apparaît en priorité au centre de la cavité dans le coeur et permet l'installation d'un écoulement établi. Dans le cas contraire, le coeur est ceinturé par quatre couches limites thermiques distinctes à l'intérieur desquelles l'écoulement prend la forme de jets de parois : le coeur est stratifié et le régime thermique est appelé "régime de couches limites".

2.3.2. Elancement ε , et nombre de Boussinesq ($Pr.Ra_H$)

Nous nous plaçons dans l'hypothèse d'un régime de couches limites où le coeur existe et se distingue nettement des couches limites thermiques environnantes. Cette hypothèse n'est pas restrictive dans la mesure où l'objectif de ce paragraphe est de mettre en évidence les conditions nécessaires à l'obtention ou non d'un écoulement de convection naturelle guidé par les couches limites. Nous nous concentrons sur le cas des fluides de faibles nombres de Prandtl pour trois raisons :

1. le cas des fluides à grand nombre de Prandtl est abordé dans la littérature (par exemple, la monographie de Bejan [1994]),

2. le raisonnement qui aboutit à ces conditions ne varie pas fondamentalement avec la valeur du nombre de Prandtl,

3. la suite de ce mémoire est consacrée au mercure et plus généralement, aux métaux liquides et aux semi-conducteurs : fluides de faible nombre de Prandtl.

Le groupement pertinent $Pr.Ra_H$, sur lequel portent les critères suivants est parfois appelé nombre de Boussinesq dans la littérature.

2.3.2.1. Cas des cavités élançées verticalement : $\epsilon > 1$

Lorsque la cavité est élançée suivant la direction verticale, il devient important de déterminer si les couches limites thermiques qui jouxtent les extrémités soumises à deux températures différentes peuvent se croiser. La couche limite thermique et la couche de fluide entraîné possèdent, pour les fluides de faibles nombres de Prandtl, des épaisseurs du même ordre de grandeur : $\delta_t \sim \delta_{FE} \sim H^*(Pr Ra_H)^{-1/4}$. Par conséquent, si une intersection entre deux couches de fluide entraîné survient, un régime établi existe et guide la circulation de Hadley (régime de coeur). Dans le cas contraire, l'écoulement est guidé par les couches limites thermiques. En conséquence, on peut estimer qu'un régime établi survient si l'épaisseur δ_t dépasse la largeur de la cavité L . En effet, un gradient de température horizontal est alors présent au coeur de la cavité et permet de mettre en place, par diffusion de la température, un profil établi de vitesse vertical. Le critère d'existence de ce régime de coeur porte alors sur l'élançement :

$$\epsilon > (Pr Ra_H)^{1/4},$$

Au contraire, si le critère inverse du précédent,

$$\epsilon < (Pr Ra_H)^{1/4},$$

est respecté, l'écoulement de recirculation reste confiné à l'intérieur des couches limites thermiques, qui sont périphériques et disjointes. Le coeur de la cavité reste alors quasi-stagnant et stratifié ; le gradient de température y est essentiellement vertical. L'écoulement est dit contrôlé par un régime de couches limites.

2.3.2.2. Cas des cavités élançées horizontalement : $\varepsilon < 1$

Pour une cavité dont l'élançement est suivant la direction horizontale, le raisonnement porte cette fois sur les flux globaux de température convectifs Φ_{conv} , ou diffusifs Φ_{cond} traversant l'épaisseur des couches limites thermiques se développant le long des parois adiabatiques. Si ces deux couches sont distinctes l'une de l'autre, le transfert de chaleur est réalisé par convection d'une extrémité à l'autre de la cavité. Par conservation, le flux global convecté s'écrit :

$$\Phi_{conv} = \rho C_p \delta_t V \Delta T,$$

où C_p est la chaleur massique du fluide à pression constante.

Dans le cas opposé où un régime établi est obtenu, la température diffuse librement dans les deux directions, y compris verticalement, entre les deux branches de l'échangeur de chaleur constitué par les couches limites horizontales se formant sur les parois adiabatiques. Le flux de conduction s'écrit :

$$\Phi_{cond} = k L \Delta T/H,$$

où k est la conductibilité thermique du fluide.

Le critère suivant, s'il est respecté, implique la présence de deux couches limites thermiques (ou deux jets pariétaux) indépendantes le long des parois adiabatiques supérieures et inférieures de la cavité (régime de couches limites).

$\Phi_{cond}/\Phi_{conv} < 1$, soit en utilisant les lois d'échelles établies auparavant :

$$\varepsilon > (Pr Ra_H)^{-1/4},$$

Le cœur de la cavité reste alors stratifié thermiquement (gradient de température uniquement vertical) et quasi-stagnant.

Au contraire, si

$$\varepsilon < (Pr Ra_H)^{-1/4},$$

un régime établi obtenu en priorité au centre de la cavité s'installe, et guide totalement ou partiellement la circulation de Hadley si l'élançement est, respectivement, très important ou modéré. La température diffuse également horizontalement.

2.3.3. Conclusions principales

Trois nombres adimensionnels sont mis en évidence dans cette étude : l'élancement ε , le nombre de Rayleigh Ra_H , et le nombre de Prandtl Pr . Les critères mis en place ci-dessus permettent de dégager quatre régimes d'écoulements dans un diagramme ($Pr Ra_H, \varepsilon$) regroupés sur la figure 4. Le régime I concerne les écoulements de convection naturelle de faible intensité : Ra_H est faible. La température diffuse dans toutes les directions, sur l'ensemble de la cavité. Dans ce cas, la convection n'a aucune influence sur les transferts de chaleur. Le régime III, au contraire, dénommé régime de couches limites (ou de jets de parois) correspond à des couches limites thermiques verticales ou horizontales indépendantes. L'écoulement est concentré à l'intérieur de ces couches limites donnant lieu à des jets de paroi. Hors de ces couches limites, le coeur est stratifié, le gradient de température est majoritairement vertical, et donne lieu à un champ de vitesse de coeur globalement faible. Le régime II concerne les cavités à très grand élancement horizontal (ε faible). Les couches limites thermiques horizontales le long des parois adiabatiques se confondent. Un écoulement établi, parallèle, s'installe sur la majeure partie de la cavité, caractérisé par un profil de vitesse horizontale en forme de "S". Un gradient de température uniforme et horizontal est présent, donnant lieu à l'écart de température ΔT , entre les deux extrémités. Les régions d'extrémités ont le rôle passif de recirculation de l'écoulement par conservation de la masse. Ce dernier régime n'est rencontré que pour des configurations présentant de très faibles ε (Cormack *et al* [1974]), typiquement $\varepsilon \sim 0.01$. Le régime IV, semblable au régime II précédent, concerne le cas de cavités très élancées verticalement. Un régime établi est présent, avec un écoulement vertical et parallèle. La température varie linéairement suivant la largeur, d'une paroi verticale à l'autre.

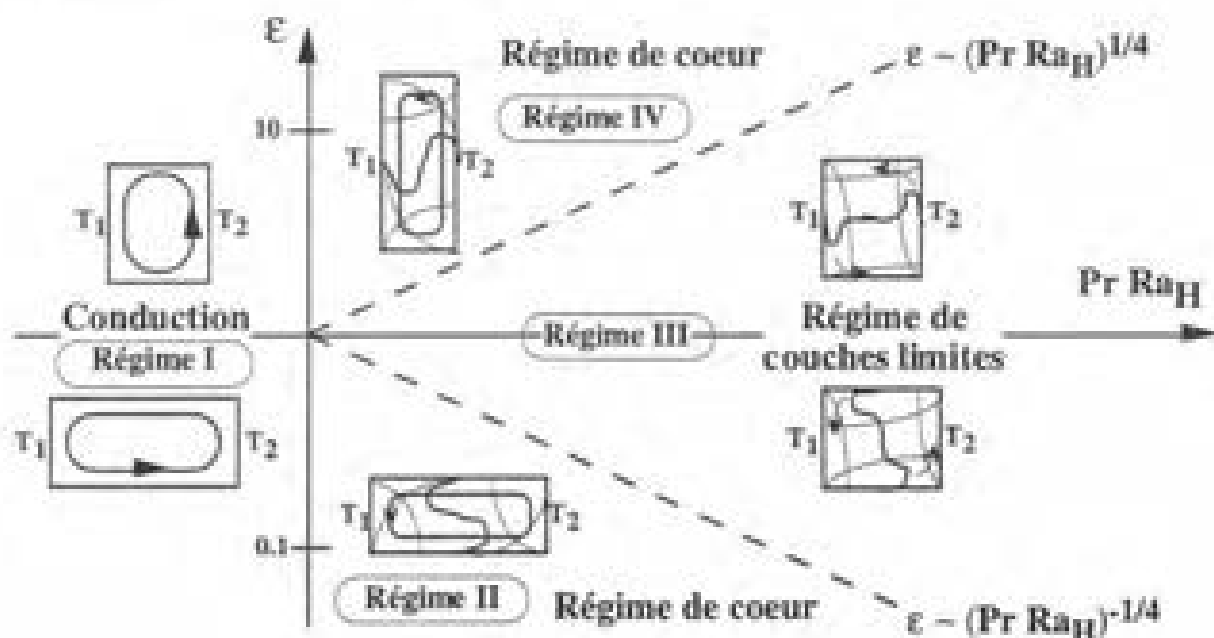


Figure 4. ($Pr \ll 1$)

2.4. Illustrations par la littérature

Quelques exemples éloquentes de convection naturelle dans des cavités sont disponibles dans la littérature. Nous sélectionnons le cas d'une cavité faiblement élargée verticalement ($\varepsilon > 1$) présentant un régime III (Gill [1966]) ainsi que le cas d'une cavité très élargée horizontalement présentant un écoulement de convection naturelle en régime II (Cormack *et al* [1974]).

2.4.1. Cavité de Gill [1966]

Bien que ce cas concerne des fluides à nombre de Prandtl plus grand que l'unité, l'exemple suivant tiré de la littérature (Gill [1966], Bejan [1979]), met bien en évidence les propriétés d'un écoulement de convection naturelle en régime III. En effet, l'étude se concentre sur une cavité élargée verticalement à nombre de Rayleigh important. L'écoulement est guidé par les couches limites thermiques aux extrémités. Deux conclusions issues de cette étude sont à mentionner :

1. l'écoulement est principalement vertical, confiné dans les couches limites thermiques sous la forme de jets de parois,
2. l'essentiel du transfert de chaleur est réalisé via les jets de paroi, par convection, tandis que le cœur est stratifié et presque stagnant.

La figure 5 ci-dessous, issue de l'étude analytique de Gill [1966], illustre ce propos. Les isothermes et les isovalues de la fonction de courant sont représentées sur la partie chaude de la cavité. On peut déduire par symétrie centrale la distribution complète de ces deux scalaires.

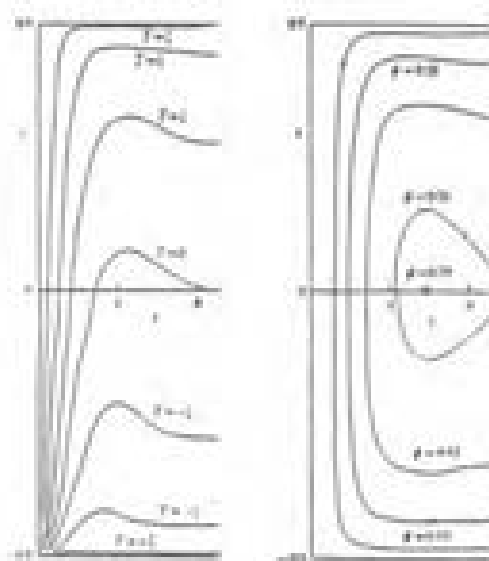


Figure 5. (D'après Gill [1966])

2.4.2. Cavité élançée de Cormack *et al* [1974]

Cormack *et al* [1974] prédisent analytiquement les propriétés d'un écoulement de convection naturelle pour un régime de type II. Ces propriétés ont ensuite été confirmées expérimentalement par Imberger [1974]. En considérant une cavité élançée horizontalement, une région très étendue de coeur se distingue des zones d'extrémités où l'écoulement recircule passivement. L'élançement horizontal de la cavité est si important (ε très faible), qu'en effectuant un développement asymptotique en puissance entières de ε , pour exprimer les champs de vitesse et de température, deux propriétés importantes sont trouvées.

1. A la région centrale de l'écoulement est associé un régime établi et un écoulement parallèle : le profil de la vitesse axiale varie avec la coordonnée verticale comme un polynôme d'ordre 3 (profil en "S"). C'est sur cette région étendue que la différence de température ΔT , entre les deux extrémités est majoritairement obtenue.

2. Le nombre de Nusselt est trouvé linéaire en fonction de $(\varepsilon Ra_H)^2$ si ce nombre de Nusselt est défini comme le flux total de température rapporté au flux idéal de conduction pure.

Ces caractéristiques se sont expérimentalement confirmées par Imberger [1974] que si l'élançement horizontal est extrêmement important (moins de 0.01). En réalité, pour des cavités faiblement élançées ($\varepsilon=0.1-10$), il est nécessaire d'envisager un rôle partiellement actif des régions d'extrémités. L'hypothèse selon laquelle le coeur est entièrement responsable de la différence de température ΔT , entre les deux extrémités n'est plus licite. Bejan [1994], en reprenant les calculs de Cormack *et al*, mais pour des élançements variant de 0.01 à 1, démontre que l'adimensionnement pertinent pour l'échelle de longueur horizontale n'est pas la longueur de la cavité mais sa hauteur. Afin de tenir compte du rôle interactif du coeur avec les zones d'extrémités, Bejan propose une expression approchée pour les champs de vitesse et de température qui tient compte à la fois de la recirculation du fluide et des conditions aux limites. Cette méthode globale est conjuguée avec un raccordement asymptotique de la solution trouvée dans la zone de recirculation avec la solution de coeur obtenue par Cormack *et al*. L'intérêt de cette démarche réside principalement dans sa capacité à prédire le nombre de Nusselt même pour des cavités dont l'élançement peut atteindre l'unité.

Finalement, pour une cavité faiblement élançée, cette étude prouve qu'il faut tenir compte du rôle actif des couches limites d'extrémités afin de modéliser complètement l'écoulement de convection naturelle.

2.5. Cas des fluides de faible nombre de Prandtl : rôle du nombre de Grashoff Gr_H

La suite de ce mémoire est consacrée à la convection naturelle du mercure (fluide à faible nombre de Prandtl) dans un cylindre horizontalement élargi.

Le fait que la couche limite thermique coïncide dans ce cas particulier avec la couche de fluide mise en mouvement peut apparaître comme une simplification du problème couplé. Jusqu'à là, le nombre de Grashoff Gr_H , ne semble pas avoir tenu un rôle décisif excepté dans la description de la couche limite visqueuse. Il nous semble pourtant important de rappeler quelques résultats issus de l'étude numérique précise menée par Hart [1983]. L'étude réalisée au paragraphe 2.2.2. montre qu'en dehors de la couche limite visqueuse, l'équilibre (inertie - flottabilité) domine. Or, pour les fluides de faible nombre de Prandtl, le nombre de Reynolds s'identifie à la racine carrée du nombre de Grashoff. En conséquence, les effets inertiels prennent de l'importance si le nombre de Grashoff augmente. Les résultats de Hart [1983] montrent que lorsque le nombre de Grashoff croît, des cellules convectives additionnelles, stationnaires, sont créées en priorité près des extrémités d'une cavité élargie horizontalement : c'est à dire dans la zone de recirculation de l'écoulement où l'inertie est justement la moins négligeable. Si cette croissance du nombre de Grashoff est maintenue, ces cellules convectives gagnent le centre de la cavité. Les fonctions de courant associées aux écoulements simulés numériquement par Hart [1983], visibles sur les figures 6a-6c ci-dessous, viennent étayer ce phénomène. Précisons que ces cellules n'ont aucun lien avec les instabilités convectives qui pourraient naître d'un cisaillement trop important dans le centre de la cavité où la vitesse axiale possède un profil parallèle en "S" caractérisé par un point d'inflexion.



Figure 6a. $Gr_H = 6.9 \cdot 10^4$

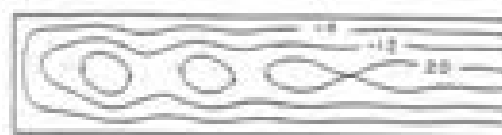


Figure 6b. $Gr_H = 8.4 \cdot 10^4$

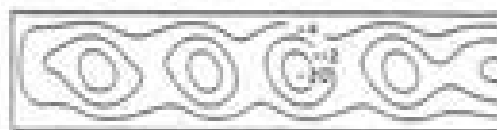


Figure 6c. $Gr_H \sim 1.5 \cdot 10^5$

Fonctions de courant sur la moitié gauche d'un rectangle soumis à un gradient de température horizontal lorsque le nombre de Grashoff augmente, respectivement, sur les figures 6a, 6b puis 6c.

(d'après Hart [1983])

2.6. Conclusions

Nous avons passé en revue quelques éléments tirés de la littérature dédiée à l'étude des écoulements de convection naturelle en configurations G-H. Pour les petits nombres de Prandtl, les conclusions suivantes ressortent de cette étude.

1. Quelle que soit la valeur de l'éclatement, il existe toujours un nombre $Pr.Ra_H$ suffisamment important pour qu'un régime de coeur disparaisse au profit d'un régime de couches limites. La présence d'un régime de coeur repose sur le critère suivant :

$$\epsilon \ll (Pr Ra_H)^{-1/4}.$$

Si le critère n'est pas vérifié, alors le coeur n'est pas seul responsable de la différence de température ΔT entre les deux extrémités de la configuration G-H. Si le critère n'est pas du tout vérifié, le coeur est stratifié.

2. Si le nombre de Grashoff Gr_H augmente (ou si le nombre de Reynolds augmente), des instabilités stationnaires apparaissent dans les zones de recirculation aux extrémités. Si la croissance de Gr_H se poursuit, ces instabilités, qui prennent la forme de cellules convectives marginales, gagnent le coeur.

3. Convection thermogravitaire MHD dans une configuration G-H

Cette partie a pour objectif la présentation des développements analytiques et numériques disponibles dans la littérature jusqu'à ce jour, concernant la convection thermogravitaire MHD en configurations G-H. Le problème de la convection naturelle d'un liquide électroconducteur de faible nombre de Prandtl, soumis à un champ magnétique uniforme \mathbf{B}_0 , appliqué successivement dans les trois directions de l'espace est abordé. Pour la croissance cristalline en configuration Bridgman horizontale, la condition idéale d'un écoulement très faiblement convectif est mieux réalisée lorsque le champ \mathbf{B}_0 est aligné avec la pesanteur : le freinage de l'écoulement par la force de Laplace est alors maximisé.

3.1. Position du problème

La complexité de ce problème tient au fait que les champs de vitesse, de température, et de densité de courant sont couplés par les équations de Navier-Stokes, de Maxwell, de l'énergie et par la loi d'Ohm. Si l'intensité du champ magnétique est suffisamment importante, un régime de conduction s'impose et le couplage précédent est affranchi de l'équation de l'énergie. Une partie de la littérature ne considère donc que le couplage entre l'électromagnétisme et l'hydrodynamique. La présentation de ce pan de la littérature est présentée sous l'appellation "problème MHD". Le couplage complet avec l'équation de l'énergie est abordé pour le cas de cavités cylindriques et parallélépipédiques soumises à un gradient de température horizontal, analytiquement par Cowley [1994] et numériquement par Ben Hadid et Henry [1994]. L'examen d'une faible non-uniformité du champ magnétique appliquée sur l'écoulement est étudié analytiquement par Neubrand *et al* [1995]. Un effet non négligeable d'une certaine non-uniformité du champ magnétique - présentant une symétrie de classe I (cf. Neubrand *et al* [1995]) - sur l'ordre de grandeur du champ de vitesse, est également mis en évidence expérimentalement par Davoust *et al* [1996].

Les variables $U, U, J, J, T, \Theta, \phi, \Phi, H, \sigma, \rho, \nu, \mu$ désignent respectivement le champ de vitesse et son ordre de grandeur, le champ de densité de courant et son ordre de grandeur, le champ de température et son ordre de grandeur, le champ de potentiel électrique et son ordre de grandeur, l'échelle de longueur caractéristique, la conductivité électrique du fluide, la densité, la viscosité cinématique et la perméabilité magnétique. L'ordre de grandeur modéré des différences de température appliquées permet de supposer uniformes les caractéristiques physiques du problème et d'adopter l'approximation de Boussinesq.

3.1.1. Le problème MHD

Pour un problème stationnaire typique de MHD, l'approximation de l'électromagnétisme est couramment pratiquée. Le temps de relaxation des charges électriques est alors supposé très faible devant la période caractéristique du problème étudié. Si celle-ci n'est pas *a priori* imposée par l'environnement physique extérieur, la période caractéristique peut être choisie égale au temps de transit des parcelles fluides. Le couplage entre les équations de Navier-Stokes, les équations de Maxwell, et la loi d'Ohm, se réduit dans ce cas au couplage entre les équations de Navier-Stokes, l'équation de l'induction magnétique et la loi d'Ohm. L'équation de l'induction est une équation aux dérivées partielles de même nature que l'équation du tourbillon en hydrodynamique classique. En conséquence, on peut définir le nombre de Reynolds magnétique comme le rapport du terme de convection du champ magnétique au terme de diffusion, son expression finale est : $Rm = \mu \sigma U_0 H$. Pour une expérience de laboratoire et plus encore pour un écoulement de convection naturelle où le champ de vitesse dépasse rarement 10^{-3} m/s, Rm reste limité à 10^{-3} . Par suite, le champ magnétique \mathbf{B}_0 peut être considéré comme uniforme et non perturbé par l'écoulement ; le couplage MHD est dit faible. Une autre hypothèse couramment acceptée pour l'écoulement laminaire des métaux liquides soumis à des champs magnétiques importants consiste à négliger l'inertie devant la force de Laplace. Le paramètre d'interaction N , mesure le rapport de la force de Laplace aux forces d'inertie et s'écrit : $N = \frac{\sigma}{\rho_{mf}} U \left[H |\mathbf{B}_0| \right]^2$. Il est de l'ordre de 10^3 et l'inertie est donc négligeable. Le nombre de Hartmann Ha , dont le carré mesure le rapport des forces de Laplace au frottement visqueux, est défini par la relation $Ha = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_{mf} \nu}} H |\mathbf{B}_0|$. Si Ha est grand devant l'unité, on distingue le coeur MHD, où la viscosité est négligeable, des couches limites cinématiques où la viscosité devient prépondérante. Si ces hypothèses sont prises en compte, le problème MHD formulé en vitesse et densité de courant (\mathbf{U}, \mathbf{J}), est gouverné par le système suivant :

Conservation de la masse	$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0,$	(I.4-1)
-----------------------------	--------------------------------	---------

Conservation de la charge électrique	$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$	(I.4-2)
---	--------------------------------	---------

Quantité de mouvement	$-\nabla \cdot \mathbf{P} - \rho_{mf} \mathbf{g} \beta (T - T_{mf}) + \mathbf{J} \times \mathbf{B}_0 + \nu \rho_{mf} \Delta \mathbf{U} = 0,$	(I.5)
-----------------------	--	-------

Loi d'Ohm	$\mathbf{J} = \sigma (-\nabla \phi + \mathbf{U} \times \mathbf{B}_0),$	(I.6)
-----------	--	-------

Selon la terminologie adoptée dans la partie 2 de ce chapitre, vouée à la présentation des propriétés des écoulements de convection naturelle dans les configurations G-H, le régime d'écoulement étudié dans cette partie 3.1.1, dédiée à l'apport de la MHD, est classé régime de type 1. Autrement dit, le nombre de Prandtl est considéré identiquement nul et seule la conduction régit les transferts de chaleur. L'adimensionnement résultant de cette hypothèse simplificatrice est donné ci-dessous. Précisons que les notations des différents champs scalaires et vectoriels restent les mêmes après cet adimensionnement, excepté le champ magnétique \mathbf{B}_0 , qui devient \mathbf{k} :

1. le champ de vitesse \mathbf{U} , est adimensionné par w/H ,
2. la densité de courant \mathbf{J} , est adimensionnée par $\sigma v B_0/H$,
3. le potentiel électrique Φ , est adimensionné par $v B_0$,
4. la pression P , est adimensionnée par $\rho v^2/H^2$,
5. la température $T-T_{ref}$, est adimensionnée par ΔT , et enfin,
6. le champ magnétique \mathbf{B}_0 est adimensionné par $||\mathbf{B}_0||$ et devient $\mathbf{k}=\mathbf{B}_0/||\mathbf{B}_0||$.

Le système image du précédent après adimensionnement, s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0, \quad (1.4-1)'$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (1.4-2)'$$

$$-\nabla \cdot \mathbf{P} + Gr_H \theta \mathbf{k} + Ha^2 \mathbf{J} \times \mathbf{k} + \Delta \mathbf{U} = 0, \quad (1.5)'$$

$$\mathbf{J} = -\nabla \phi + \mathbf{U} \times \mathbf{k}, \quad (1.6)'$$

Coeur MHD de l'écoulement

Si le nombre de Hartmann est grand, loin des parois, le terme de frottement visqueux disparaît de l'équation de la quantité de mouvement (1.5)'. On définit le coeur MHD comme l'écoulement non visqueux régi par l'équilibre entre le couple de flottabilité ($\nabla \times Gr_H \theta \mathbf{k}$) et le couple magnétique $\nabla \times Ha^2 \mathbf{J} \times \mathbf{k}$. On distingue deux types de couches limites pour lesquelles la viscosité moléculaire est prise en compte : les couches de Hartmann et les couches parallèles. Ces régions, qui permettent le raccordement asymptotique du champ de vitesse de la paroi avec le coeur de l'écoulement, sont alors dominées par l'équilibre entre le couple visqueux, le couple de flottabilité et le couple magnétique. La contribution des couches de Hartmann et des couches parallèles va bien au-delà de ce rôle passif de prise en compte de l'adhérence à la paroi. Par la suite, nous rappelons comment l'écoulement peut être contrôlé par les couches de Hartmann. Dans le cas où les couches de Hartmann ne remplissent pas un rôle de première importance, les ordres de grandeur du champ de vitesse, de la densité de courant, et du potentiel électrique dans

le coeur, respectivement notés : U_c , J_c , Φ_c , sont simplement délivrés par les équations (1.5)' et (1.6)' :

$$U_c = J_c = \Phi_c = O(Gr_H / Ha^2).$$

A l'instar d'Alboussière *et al* [1993], la formulation (U, J) précédente peut être réécrite en faisant intervenir l'opérateur rotationnel ($\nabla \times$) pour s'affranchir de la pression et du potentiel électrique. Comme le démontrent Alboussière *et al* [1993], des combinaisons linéaires de $\nabla \times (\nabla \times (1.3)')$ et $\nabla \times (1.2)'$ permettent de faire apparaître les variables M^+ et M^- définies par $M^\pm = \nabla \times U \pm Ha J$. Ces transformations débouchent sur le système suivant :

$$\nabla \cdot M^\pm = 0, \quad (1.4-1)'' , (1.4-2)''$$

$$Gr_H \nabla \times \theta k + Ha(k, \nabla)M^+ + \Delta M^+ = 0, \quad (1.5)''$$

$$Gr_H \nabla \times \theta k - Ha(k, \nabla)M^- + \Delta M^- = 0, \quad (1.6)''$$

L'intérêt primordial des notations M^\pm , d'Alboussière *et al* [1993] réside dans l'apparition de l'opérateur linéaire \mathfrak{L} , dans les équations (1.5)'' et (1.6)'', caractéristique d'un couplage faible MHD et défini par :

$$\mathfrak{L} = \{Ha(k, \nabla) + \Delta\}.$$

Tendance à la bidimensionnalisation

La forme de l'opérateur \mathfrak{L} indique que, si Ha est suffisamment grand et si la direction suivant k n'est pas limitée par la géométrie, une structure tourbillonnaire aura tendance à s'allonger suivant une longueur Ha^*R , si R est l'échelle de longueur transversale de la structure tourbillonnaire. Cette tendance à la bidimensionnalisation reflète le caractère anisotrope du champ magnétique mis en évidence par Somméria and Moreau [1982]. Bien observée en absence de toute flottabilité, elle peut néanmoins être enrayée dans le cas particulier où la direction du champ magnétique k est verticale et le gradient de température principal orthogonal à k . Si le nombre de Grashoff est important, la vorticité créée par la flottabilité est horizontale alors que la tendance à l'anisotropie du champ magnétique consiste à ne privilégier que la composante suivant k .

Couches de Hartmann et couches parallèles

Par ailleurs, l'opérateur linéaire \mathfrak{L} permet d'énoncer certaines des propriétés propres aux couches de Hartmann et aux couches parallèles. Le nombre de Prandtl du fluide est supposé très petit devant l'unité et les rappels effectués dans la partie 2 s'appliquent. Par suite, à l'intérieur des couches limites visqueuses (couches de Hartmann et couche parallèle), la diffusion de la température est le phénomène thermique prépondérant.

En hydrodynamique, les couches limites cinématiques manifestent souvent un comportement passif en raccordant asymptotiquement le champ de vitesse potentiel à la paroi par respect de la condition d'adhérence (citons par exemple : la couche de Blasius).

En MHD, les couches de Hartmann peuvent **en plus** contrôler l'écoulement dans le cœur MHD parce qu'elles permettent au courant électrique de se conserver si les parois sont électriquement isolantes. Rappelons les propriétés de ces couches limites bien particulières. Comme expliqué dans la monographie de Moreau [1990], dans un écoulement MHD, la hiérarchie qui s'établit entre les diverses régions est la suivante :

1. $\left\{ \begin{array}{l} \text{couches de Hartmann} \\ \text{cœur MHD} \end{array} \right.$,
2. couches parallèles.

On définit les couches de Hartmann comme des couches limites qui se développent le long de parois non-parallèles à la direction du champ magnétique (figure 7a). L'opérateur \mathfrak{L} s'écrit dans ce cas en termes d'ordres de grandeur :

$$\mathfrak{L} \sim \left\{ Ha \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial^2}{\partial n^2} \right\},$$

où \mathbf{n} désigne la normale à la paroi, alignée avec la composante principale du champ magnétique appliqué \mathbf{B}_0 . Si δ_{Ha} désigne l'épaisseur de la couche limite de Hartmann, l'expression précédente de \mathfrak{L} conduit à l'ordre de grandeur caractéristique de cette épaisseur :

$$Ha \frac{1}{\delta_{Ha}} = \frac{1}{\delta_{\eta Ha}^2}, \text{ soit } \delta_{Ha} = Ha^{-1/2}.$$

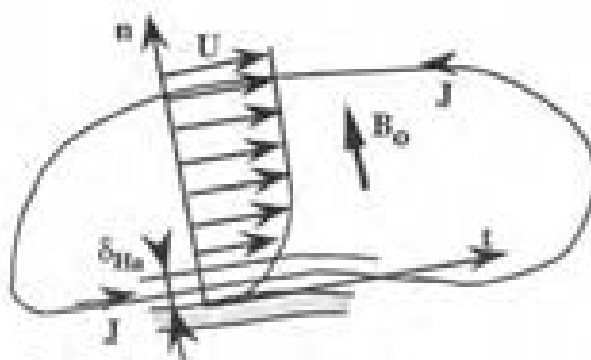
Les couches parallèles sont définies comme des couches limites cinématiques se développant soit sur des parois parallèles au champ magnétique imposé (figure 7b), soit entre deux cœurs MHD voisins mais électriquement disjoints.

L'expression "électriquement disjoints" désigne le fait que dans chaque cœur MHD, des densités de courant sont induites et se rebouclent grâce à la présence d'une couche parallèle libre (figure 7c). Cette fois, pour une couche parallèle pariétale ou libre, l'opérateur \mathcal{L} s'écrit en termes d'ordres de grandeur :

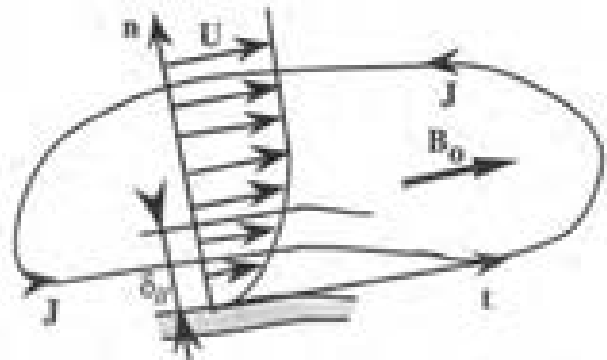
$$\left\{ Ha \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial n^2} \right\},$$

où t désigne la direction tangente parallèle au champ magnétique. L'ordre de grandeur de n est l'épaisseur de la couche parallèle $\delta_{||}$, et l'ordre de grandeur de t est égal à l'échelle de longueur suivant B_0 , de l'ordre de l'unité (même ordre de grandeur que la géométrie). On en déduit l'ordre de grandeur caractéristique de $\delta_{||}$:

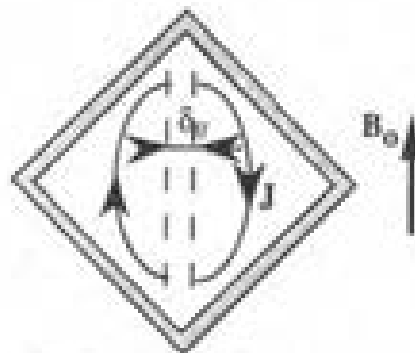
$$Ha = \frac{1}{\delta_{||}^2}, \text{ soit } \delta_{||} = Ha^{-1/2}.$$



7a. couche de Hartmann



7b. couche parallèle pariétale.



7c. couche parallèle entre deux coeurs électriquement disjoints, d'après Alboussière *et al* [1993].

Contrôle d'un écoulement MHD par les couches de Hartmann

La propriété des couches parallèles pariétales réside dans le fait que, si la paroi parallèle au champ magnétique est électriquement isolante, la densité de courant électrique du coeur MHD \mathbf{J}_c se referme à l'intérieur de ces couches **parallèlement** au champ magnétique. La force de Laplace ne s'oppose pas à l'écoulement. Les couches parallèles se distinguent donc dans ce cas par un champ de vitesse d'ordre de grandeur U_δ plus important que dans le coeur MHD de l'écoulement. Leur rôle reste néanmoins passif dans le sens où ces couches parallèles peuvent être oubliées lors de l'estimation de l'ordre de grandeur du champ de vitesse U_c , dans le coeur MHD de l'écoulement.

En revanche, les couches de Hartmann contrôlent l'écoulement de coeur MHD (Mortau [1990]). Le champ de vitesse U_c est du même ordre de grandeur que la densité de courant \mathbf{J}_{Ha} passant à travers les couches de Hartmann. Si la densité de courant \mathbf{J}_c ne peut se refermer naturellement dans le coeur MHD via les gradients de potentiel électrique dus à l'interaction entre le champ de vitesse et le champ magnétique imposé, et si la paroi de la cavité est électriquement isolante, alors la densité de courant \mathbf{J}_c se reboucle par les couches de Hartmann. Par conservation de la densité de courant, le flux de densité de courant normal à la couche de Hartmann $\mathbf{J}_c \cdot \mathbf{n}|_{Ha}$, à travers l'échelle de longueur caractéristique du coeur $O(1)$, est égal au flux de densité de courant \mathbf{J}_{Ha} , dans la couche de Hartmann :

$$\mathbf{J}_c \cdot \mathbf{n}|_{Ha} * O(1) = \mathbf{J}_{Ha} * \delta_{Ha}.$$

Finalement, puisque U_c est proportionnel à \mathbf{J}_{Ha} et que $\delta_{Ha} = Ha^{-1}$, l'ordre de grandeur U_c vaut :

$$U_c = \mathbf{J}_{Ha} = O(Ha) \quad \text{si} \quad \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{n}|_{Ha} = O(1), \quad (1.7)$$

ou bien,

$$U_c = \mathbf{J}_{Ha} = O(1) \quad \text{si} \quad \mathbf{J}_c \cdot \mathbf{n}|_{Ha} = O(Ha^{-1}). \quad (1.8)$$

Si la relation (1.8) s'applique, la densité de courant normale à la frontière de la couche de Hartmann $\mathbf{J}_c \cdot \mathbf{n}|_{Ha}$, est nulle à l'ordre $O(Ha^{-1})$: les couches de Hartmann sont électriquement inactives et seule une faible part de la densité de courant du coeur \mathbf{J}_c recircule par les couches de Hartmann. L'ordre de grandeur du champ de vitesse dans le coeur MHD est alors donné par la relation :

$$U_c \sim Gr/Ha^2.$$

En revanche, si la relation (1.7) s'applique, la majeure partie de la densité de courant \mathbf{J}_c recircule par l'intermédiaire des couches de Hartmann, alors dites électriquement actives : elles forcent un écoulement dans le coeur, d'ordre de grandeur Ha fois plus grand que dans le cas précédent :

$$U_c \sim Gr/Ha.$$

3.1.2. Couplage avec l'équation de l'énergie

Du point de vue des transferts de chaleur, nous avons déjà évoqué le fait que l'étude théorique du cas idéal d'une plaque chaude plongée dans un milieu infini n'est pas applicable en pratique. L'importance du circuit électrique mentionnée dans le paragraphe précédent vient conforter ce point de vue. Dans le cadre des écoulements MHD autour d'obstacles, Hunt and Shercliff [1971] ont montré que le rôle des parois de Hartmann est essentiel. Ces parois, aussi éloignées soient-elles, doivent absolument être prises en compte pour prédire correctement l'ordre de grandeur du champ de vitesse autour d'un obstacle noyé dans l'écoulement MHD d'un fluide électroconducteur.

Le rôle crucial du circuit électrique dans la phénoménologie des écoulements de convection naturelle MHD vient d'être souligné au paragraphe 3.1.1. En conséquence, nous pensons qu'une théorie développée sans tenir compte du rôle électrique des couches de Hartmann ne peut pas décrire les transferts de chaleur dans la plupart des écoulements thermogravitaires MHD confinés par des parois électriquement isolantes. C'est principalement pour cette raison que la présence de la partie 3 dans ce mémoire se justifie.

La clef pour détecter le rôle électriquement actif ou inactif des couches de Hartmann réside dans l'examen des symétries présentées par les variables scalaires et vectorielles impliquées dans le problème MHD étudié. Cet examen permet de prédire la géométrie du circuit électrique.

3.2. Importance du circuit électrique

La présentation des études analytiques portant sur le couplage fort (couplage complet du problème MHD avec l'équation de l'énergie) est réalisée *a posteriori*. Cette partie s'intéresse au cas d'un écoulement MHD parallèle faiblement couplé avec une distribution de température linéaire imposée. Le nombre de Rayleigh est donc choisi suffisamment petit devant l'unité pour que la perturbation de température par rapport au profil linéaire, engendrée par le champ de vitesse U_e , ne conduise pas à une modification supplémentaire de U_e . Comme illustré sur la figure 8, dans cette étude bibliographique, les études bidimensionnelles sont menées dans le plan XZ où le champ de vitesse est $u=(U,W)$ et la dimension Y est supposée infinie. Les études 3-D sont réalisées dans la base (X, Y, Z) et le champ de vitesse est $u=(U,V,W)$.

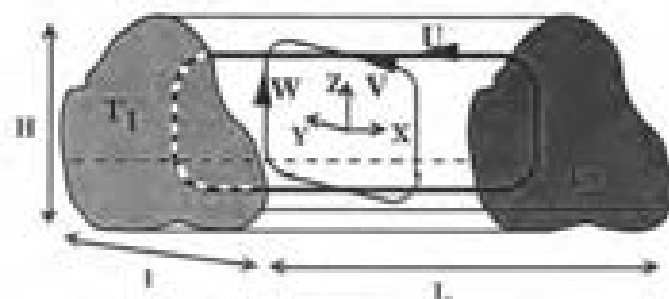


Figure 8.

3.2.1. Etude 2-D

La modélisation bidimensionnelle d'un écoulement MHD, thermogravitaire ou non, donne l'ordre de grandeur du champ de vitesse U_z , dans le cœur MHD si les parois de Hartmann sont prises en considération. L'hypothèse forte d'une modélisation 2-D conduit néanmoins à négliger la distribution du potentiel électrique. En effet, d'après la conservation de la charge électrique (1.4-17), la divergence de la loi d'Ohm (1.6)' permet d'écrire l'équation du potentiel électrique :

$$\Delta\phi = B_0 \left[\frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial X} \right]$$

L'étude étant bidimensionnelle, cette équation se simplifie en une équation de Poisson : $\Delta\Phi = 0$, dont l'unique solution est un champ électrique nul. En effet, on peut toujours trouver, quelque part, autour du domaine fluide étudié, une frontière électriquement isolante. La force de Laplace par unité de volume se simplifie donc en une force de freinage :

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0 = -(\sigma / \rho_{\text{ref}}) U B_0^2 \mathbf{X}$$

Précisons que l'évaluation quantitative précise de U_z par un modèle 2-D avec parois de Hartmann n'est valable que dans le cas où les parois, parallèles au champ magnétique et non prises en compte par le modèle, sont supposées parfaitement électriquement conductrices.

Convection naturelle dans un rectangle sous champ magnétique vertical (Garandet *et al* [1992])

L'hypothèse d'écoulement MHD 2-D permet de calculer explicitement une solution analytique au problème de la convection naturelle MHD dans un plan XZ soumis à un gradient de température horizontal et à un champ magnétique vertical $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{Z}$, uniforme. Garandet *et al* [1992] réalisent cette étude et déterminent le champ de vitesse d'un écoulement 2-D parallèle compris entre deux plaques planes infiniment longues suivant la direction Y. Le gradient de

température horizontal et uniforme est égal à $(\Delta T/L) X$. Par la suite, G_0 désigne la valeur de ce gradient de température.

Calcul de l'écoulement parallèle

Les plaques inférieure et supérieure sont supposées adiabatiques, et le nombre de Hartmann suffisamment grand pour supposer que le nombre de Rayleigh effectif $Ra_{\Delta T}$ (défini *a posteriori*), est nettement plus petit que l'unité. L'écoulement parallèle u , déterminé en résolvant le système adimensionné suivant, est cherché sous la forme $u=U(Z)X$.

Equation du tourbillon

projetée sur Y
$$\frac{d^3 U}{dZ^3} - Ha^2 \frac{dU}{dZ} = Gr_{\Delta T}, \quad \text{où} \quad Gr_{\Delta T} = \frac{\beta g \Delta T H^4}{L \nu^2}.$$

Equation de l'énergie
$$\frac{d^2 \theta}{dZ^2} = Pr \varepsilon U.$$

Sur la figure 9a sont représentées la géométrie, les conditions aux limites thermiques supposées ainsi que les solutions pour la vitesse et la température obtenues par les auteurs. Les termes en \sinh (sinus hyperbolique) permettent de tenir compte de la condition d'adhérence aux plaques.

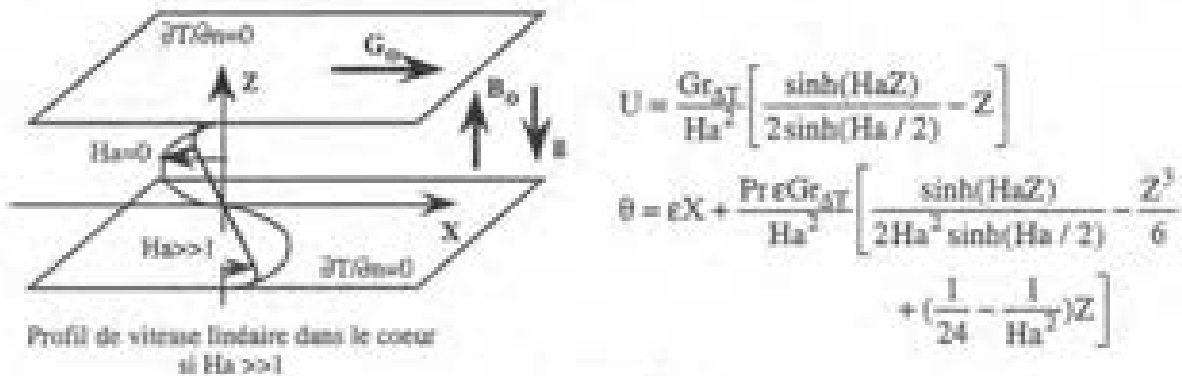


Figure 9a.

Plusieurs résultats importants sont à mentionner.

1. Garandet *et al* [1992] mettent en évidence un nombre de Rayleigh effectif $Ra_{\Delta T} = Pr Gr_{\Delta T} / Ha^2$, qui prend en compte l'effet de freinage MHD. Le nombre de Rayleigh $Ra_{\Delta T}$ est calculé à partir du nombre de Grashoff $Gr_{\Delta T}$, qui s'exprime à partir du gradient de température G_0 égal à l'écart de température imposé entre les deux extrémités ΔT , divisé par la distance L , qui les sépare. La vitesse est supposée assez freinée pour ne perturber que faiblement le champ de température. Cette hypothèse est tout à fait plausible lorsque $Pr \sim 10^{-2}$, $Ha \sim 10^2$, $Gr_{\Delta T} \sim 10^4 - 10^5$.

2. Si le nombre de Hartmann est très grand devant l'unité, Garandet *et al* [1992] déterminent un champ de vitesse dans le coeur de l'écoulement U_c , défini par la loi linéaire :

$$U_c = -\frac{Gr_{\Delta T}}{Ha} Z.$$

L'ordre de grandeur trouvé pour U_c , $O(Ha^{-2})$, est cohérent avec un rôle électriquement inactif des couches de Hartmann.

Calcul de l'écoulement de recirculation

Ce calcul est mené en supposant que, loin de l'extrémité, le raccordement asymptotique avec la solution précédente (écoulement parallèle) est toujours possible. Dans le calcul de l'écoulement recirculant, Garandet *et al* [1992] supposent la présence d'un régime thermique de type I ; un régime établi est de fait présent. Cette dernière hypothèse est très bien confortée par les simulations numériques 3-D d'écoulements thermogravitaires MHD menés par Ben Hadid and Henry [1994], Ozoe and Okada [1989] et Davoust *et al* [1995] pour des configurations, respectivement, parallélépipédique, cubique et cylindrique. Ces auteurs ont tous observé que l'augmentation du nombre de Hartmann (à nombre de Grashoff $Gr_{\Delta T}$, et élanement fixés) conduit à l'avènement d'un régime de coeur dans le centre de la cavité, caractérisé par un écoulement parallèle. En effet, le nombre de Rayleigh $Ra_{\Delta T}$, est inversement proportionnel au carré du nombre de Hartmann. Pour un fluide choisi (Pr fixé et faible) et un nombre de Grashoff fixé, augmenter le nombre de Hartmann revient toujours à diminuer le nombre de Rayleigh. Le critère d'existence d'un régime de coeur, valable pour les configurations G-H (cf. Partie 2 de ce chapitre) est :

$$\epsilon \ll (Pr \cdot Ra_{\Delta T})^{-1/4}.$$

Ce critère est donc finalement respecté dès que le nombre de Hartmann est suffisamment important.

Le paramètre d'interaction est supposé suffisamment grand pour que l'inertie puisse être négligée devant la force de Laplace. Le nombre de Hartmann, également supposé grand devant l'unité implique la présence d'une couche parallèle le long de l'extrémité verticale. Cette étude analytique mène donc le calcul de la couche parallèle et tient compte de l'équilibre entre la force de Laplace, la force de flottabilité et la traînée visqueuse.

Sont présentés sur les figures 9b, 9c, et 9d, respectivement la configuration géométrique étudiée, la solution trouvée pour la composante axiale U , et la composante verticale W du champ de vitesse. Comme pour le cas des écoulements MHD classiques dans des conduites aux parois parfaitement conductrices de l'électricité (couches de Hartmann électriquement inactives), l'épaisseur de la couche parallèle est de l'ordre de $Ha^{-1/2}$, tandis que U et W sont trouvés de l'ordre de Gr/Ha^2 et $Gr/Ha^{3/2}$ (cet exposant $3/2$ résulte directement de la continuité). Finalement, il est précisé que l'inertie peut être négligée si $Gr/Ha^3 \ll 1$. Cette condition, pour le cas des métaux liquides, est rarement plus sévère que l'hypothèse d'un régime thermique 1.

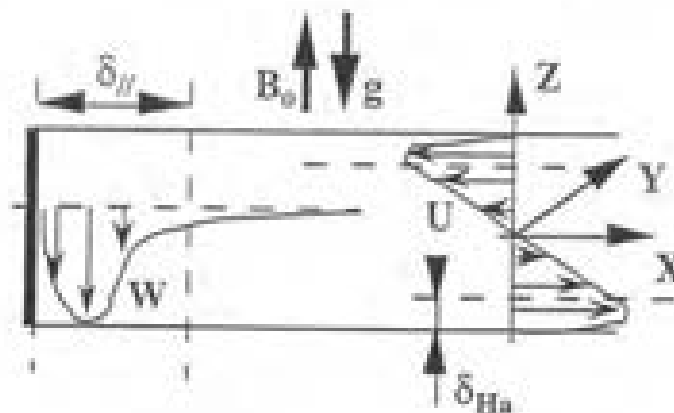
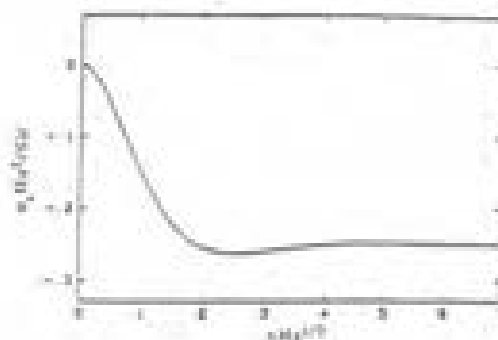
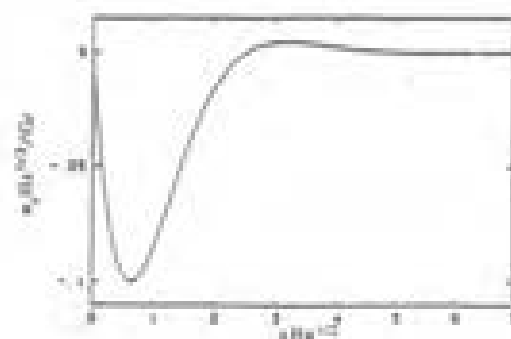


Figure 9b. Géométrie de la configuration pour l'écoulement recirculant



Composante axiale du champ
de vitesse $U(X,Z)$

Figure 9c.



Composante verticale du champ
de vitesse $W(X,Z)$

Figure 9d.

(d'après Garandet *et al* [1992])

3.2.2. Etudes 3-D, importance du circuit électrique

Nous présentons maintenant des études analytiques et numériques tridimensionnelles pour lesquelles la forme réelle de la section dans le plan YZ est prise en compte. Pour les aspects analytiques, l'essentiel de cette analyse concerne les résultats d'Alboussière *et al* [1993]. Plus récemment, Ben Hadid and Henry [1994] ont réalisé des simulations numériques basées sur des algorithmes et des schémas numériques précis (méthodes spectrales). Les champs magnétiques uniformes impliqués dans ces simulations sont orientés dans les trois directions de l'espace et appliqués à un écoulement thermogravitaire dans une cavité parallélépipédique. Ces derniers ont trouvé des lois d'échelles pour le champ de vitesse qui viennent confirmer les pronostics analytiques d'Alboussière *et al* [1993], de Cowley [1994], ainsi que les résultats expérimentaux de Davoust *et al* [1994]. L'étude analytique de la perturbation de l'écoulement occasionnée par l'influence d'une faible non-uniformité b du champ magnétique uniforme appliqué B_0 , est réalisée par Neubrand *et al* [1995]. Les résultats issus de cette étude sont commentés.

Influence de la forme de la section sous l'hypothèse $Ha \gg 1$ (Alboussière *et al* [1993])

Le gradient de température horizontal G est connu et imposé. En supposant la présence d'un écoulement établi, Alboussière *et al* [1993] démontrent que la forme de la section conditionne l'ordre de grandeur du champ de vitesse axial dans le coeur MHD de l'écoulement U_c , écrit sous la forme $U_c = U(Y, Z) \cdot X$. L'étude menée par ces auteurs est asymptotique : le nombre de Hartmann est supposé très grand devant l'unité. En outre, le nombre de Prandtl étant faible pour les métaux liquides, le nombre de Rayleigh Ra_0 pour un gradient de température G fixé, est considéré très petit. La distribution de température T s'écrit finalement sous la forme :

$$T = T_{ref} + GX,$$

soit, sous forme adimensionnée,

$$\theta = X.$$

Le contour de la section du profil cylindrique, contenu dans le plan YZ, est défini par les fonctions $Z=Z_1(Y)$ et $Z=Z_2(Y)$ pour les parties supérieure et inférieure (figure 10).

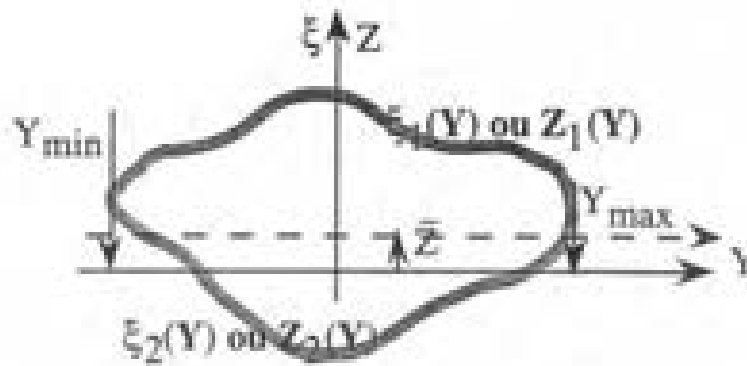


Figure 10. Contour des sections étudiées (d'après Alboussière *et al* [1993])

Les champs de vitesse et de densité de courant électrique dans le cœur MHD de l'écoulement, U_e et J_e , s'expriment par les relations :

$$U_e = \left\{ \frac{Gr_G}{Ha^2} \xi \left[\frac{d^2 \left(\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{4} \right)}{dY^2} - 1 \right] - \frac{Gr_G}{Ha} \left[\frac{\xi_1^2 - \xi_2^2}{4} \right] \right\} X$$

$$J_e = \frac{Gr_G}{Ha^2} \left\{ \xi Y + \frac{d \left(\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{4} \right)}{dY} Z \right\}$$

avec :

$$Gr_G = \frac{\beta g G H^4}{\nu^2} \quad \text{et} \quad Ha = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_{ref} \nu}} \|B_o\| H \gg 1.$$

La variable ξ est définie par la translation $\xi = Z + \bar{Z}$ où \bar{Z} est une translation portant sur la coordonnée Z , qui permet l'écriture simplifiée des champs de vitesse et de densité de courant précédents dans le repère propre (Y, ξ) :

$$\bar{Z} = \frac{Y_{max}}{Y_{max} - Y_{min}} \frac{\int_{Y_{min}}^Y (Z_1 - Z_2) \frac{(Z_1 + Z_2)}{2} dY}{\int_{Y_{min}}^{Y_{max}} (Z_1 - Z_2) dY}$$

L'origine de la nouvelle coordonnée verticale ξ , se confond avec le "centre électrique" de la section droite défini comme le point autour duquel se bouclent les lignes de densité de courant électrique, *a priori*, inconnu.

Deux situations distinctes se dégagent de cette étude selon que la section est symétrique par rapport à l'axe Y ou non.

1. Sections symétriques :

Dans ce cas, $Z_1 = -Z_2$ et \bar{Z} est identiquement nul : le "centre électrique" se confond avec le centre de symétrie. Par suite, $\xi_1^2 = \xi_2^2$ et U_c est de l'ordre de Gr/Ha^2 . Prenons le cas particulier de la section circulaire pour laquelle :

$$Z_1(Y) = \xi_1(Y) = -Z_2(Y) = -\xi_2(Y) = \sqrt{(1 - Y^2)}.$$

Les champs de vitesse et de densité de courant s'expriment alors sous la forme :

$$U_c = -2 \frac{Gr_G}{Ha^2} Z X \quad \text{et} \quad J_c = \frac{Gr_G}{Ha^2} (Z Y - Y Z).$$

L'expression précédente de la densité de courant J_c indique que les lignes de densité de courant électrique sont des cercles concentriques. En conséquence, la densité de courant électrique ne se referme pas par les couches de Hartmann. Le courant électrique total dans le cœur étant nul, on peut affirmer que les couches de Hartmann sont électriquement inactives. Le freinage de l'écoulement est donc particulièrement efficace (en Ha^{-2}) alors que les parois de la section sont supposées électriquement isolantes. Par comparaison, le champ de vitesse d'un écoulement en conduite circulaire dû à un gradient de pression est de l'ordre de Ha^{-2} si les parois sont électriquement conductrices et de l'ordre de Ha^{-1} si les parois sont électriquement isolantes.

Le champ de vitesse axial U_c obtenu par cette étude 3-D est double de celui calculé avec un point de vue 2-D par Garandet *et al* [1992]. L'explication tient au fait qu'avec une théorie 3-D, le champ de vitesse dans le cœur MHD U_c doit non seulement équilibrer la densité de courant J_c , mais aussi le gradient du potentiel électrique $\nabla \Phi_c$ dans la loi d'Ohm. Alboussière *et al* [1993] montrent d'ailleurs, que lorsque les parois sont supposées parfaitement électriquement conductrices, le champ de vitesse est réduit d'un facteur 2 par rapport au cas des parois électriquement isolantes.

2. Sections asymétriques :

Dans ce cas, $Z_1 \neq -Z_2$ et $\xi_1^2 \neq \xi_2^2$. Le champ de vitesse dans le cœur U_c comporte à la fois un terme de l'ordre de Gr/Ha^2 et un terme de l'ordre de Gr/Ha . Ce changement brutal sur l'ordre de grandeur est expliqué par le fait que, cette fois, le courant électrique total à travers le cœur MHD de l'écoulement n'est plus nul.

Par suite, lorsque les parois sont électriquement isolantes, la densité de courant J_z se referme dans les couches de Hartmann. Celles-ci deviennent électriquement actives, ce qui implique un champ de vitesse dans le cœur de l'ordre de G_0/Ha .

Influence de la direction de B_0

Ben Hadid and Henry [1994] réalisent une simulation numérique 3-D complète de l'écoulement thermogravitaire MHD dans un parallélépipède d'élanement $\varepsilon=H/L=0.25$. Trois directions du champ magnétique uniforme imposé (suivant X , Y et Z) sont étudiées. Ces auteurs déterminent des ordres de grandeur du champ de vitesse directement dépendants de la direction de B_0 . Nous proposons par une analyse des ordres de grandeur, d'interpréter quelques résultats-clés obtenus par ces auteurs pour deux directions principales du champ magnétique. Puisque la cavité est un parallélépipède d'élanement transversal égal à l'unité, la section du profil cylindrique représenté sur la figure 8 prend maintenant la forme d'un carré.

1. B_0 aligné suivant Z , influence des couches parallèles

Sur les figures 11a, 11b, sont représentés le champ de vitesse axial U_X , et la densité de courant électrique J_z , obtenus par les auteurs dans la section centrale de la cavité parallélépipédique. Les gradients de potentiel électrique sont concentrés dans les couches parallèles pariétales : la vitesse axiale de l'écoulement se présente sous la forme de jets localisés au voisinage du cœur MHD de l'écoulement : figure 11a. Nous notons U_H l'ordre de grandeur de la vitesse U_X , associée à ces jets et U_c , J_c , les ordres de grandeur de la vitesse U_c et de la densité de courant J_c dans le cœur MHD de l'écoulement. En accord avec les arguments physiques présentés dans le paragraphe 3.2.1., dans le plan médian XZ , les ordres de grandeur trouvés sont effectivement prédits par le calcul analytique 2-D de Garandet et al [1992] : $U_c \sim \Phi_c \sim J_c \sim O(Ha^{-2})$.



figure 11a. Vitesse axiale U_X

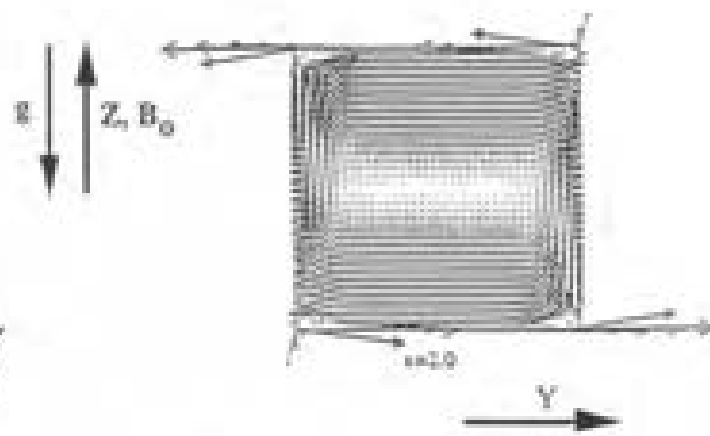


figure 11b. Densité de courant J

(d'après Ben Hadid and Henry [1994])

La figure 11b montre que la densité de courant de coeur J_c recircule par les couches parallèles. Par conservation du courant électrique, l'ordre de grandeur $J_{//}$ de la densité de courant qui circule dans les couches parallèles $J_{//}$ peut être évalué :

$$J_{//} * \delta_{//} = J_c * l, \text{ avec } \delta_{//} = Ha^{-1/2} \text{ et } J_c = Ha^{-2},$$

soit

$$J_{//} = Ha^{-3/2}.$$

Dans la couche parallèle, la densité de courant est principalement verticale car elle est créée par le gradient de potentiel électrique. La densité de courant de coeur J_c est principalement horizontale et est impaire avec Z :

$$J_Y = J_c = Ha^{-2} \text{ et } J_Z = J_{//} = Ha^{-3/2}.$$

A la frontière entre les couches parallèles et le coeur MHD, la loi d'Ohm ainsi que les relations précédentes permettent d'écrire l'expression des projections suivant Y et Z de la densité de courant en ordres de grandeur :

$$J_Y = \frac{-\partial\phi}{\partial Y} - U = \frac{\phi}{\delta_{//}} + U_{//} ,$$

$$J_Z = \frac{-\partial\phi}{\partial Z} = \frac{\phi}{l} .$$

A partir des quatre dernières relations, l'ordre de grandeur du potentiel électrique dans la couche parallèle et par suite, l'ordre de grandeur du champ de vitesse axial associé aux jets, peuvent être estimés :

$$\phi = Ha^{-3/2} \text{ et } U_{//} = Ha^{-1}.$$

Le gradient de potentiel électrique suivant Y , ne peut être équilibré par la densité de courant de coeur d'ordre de grandeur trop faible. La loi d'Ohm impose un champ de vitesse d'ordre de grandeur plus important dans la couche parallèle pour équilibrer ce gradient de potentiel électrique.

Ce phénomène de jets de parois, typique du comportement des couches parallèles, est imputable au circuit électrique. L'étude 2-D de cet écoulement prédit un freinage important de la composante axiale de la vitesse (de l'ordre de Ha^{-2}). Une étude 3-D présente l'avantage de prendre en compte la distribution de potentiel électrique et prédit un champ de vitesse au voisinage des couches parallèles, Ha fois supérieur.

2. B_0 aligné suivant Y, influence des couches de Hartmann

Sur les figures 12a et 12b sont représentés le champ de vitesse axial, et la densité de courant obtenus par Ben Hadid and Henry [1994] dans la section carrée centrale du même parallélépipède pour le cas d'un champ magnétique orienté cette fois suivant Y. Les auteurs déterminent l'ordre de grandeur suivant pour le champ de vitesse dans le coeur : $U_c \sim Ha^{-1}$. La compréhension de cet ordre de grandeur, différent de Ha^{-2} , passe cette fois par la prise en compte du caractère électriquement actif des couches de Hartmann.

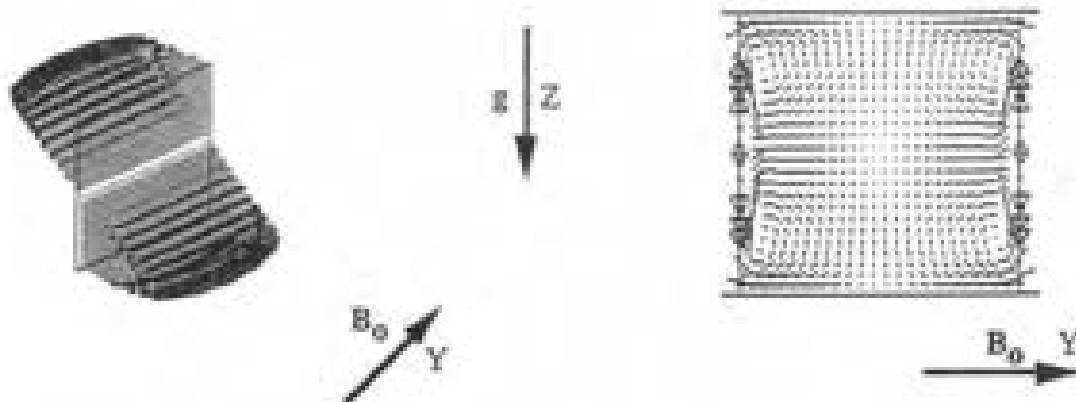


figure 12a. Vitesse axiale U_X

figure 12b. Densité de courant J

(d'après Ben Hadid and Henry [1994])

Les directions du champ magnétique et du rotationnel de la force de la flottabilité sont identiques. Le couple de flottabilité engendre de la vortécité suivant Y (circulation de Hadley). Cette fois, la tendance à la bidimensionnalisation liée à l'anisotropie introduite par le champ magnétique s'affirme en privilégiant justement cette composante de la vortécité. Ces deux mécanismes convergent et expliquent la quasi-invariance de la composante axiale du champ de vitesse selon la direction Y à grands nombres de Hartmann : $\partial(U_c X)/\partial Y \ll 1$. Cette tendance à la bidimensionnalisation implique que dans le coeur $J_c \sim O(Ha^{-2})$. La figure 12b montre la recirculation de la densité de courant de coeur non seulement par les couches parallèles mais aussi par les couches de Hartmann. Cette recirculation prend la forme de quatre boucles de recirculation qui peuvent s'expliquer, dans le coeur MHD, par l'interaction de U_c avec B_0 . Puisque les couches de Hartmann sont électriquement actives, U_c est proportionnel à la densité de courant qui recircule dans les couches de Hartmann J_{Ha} , d'ordre de grandeur J_{Ha} (Moreau [1990]). La conservation du flux de densité de courant implique la relation suivante :

$$J_c \sim 1 = J_{Ha} \cdot \delta_{Ha}, \text{ avec } \delta_{Ha} \sim Ha^{-1} \text{ et } J_c \sim Ha^{-2}.$$

Par suite, l'ordre de grandeur du champ de vitesse dans le coeur est : $U_c \sim Ha^{-1}$. On notera que cet ordre de grandeur ne peut pas être prédit avec un point de vue bidimensionnel.

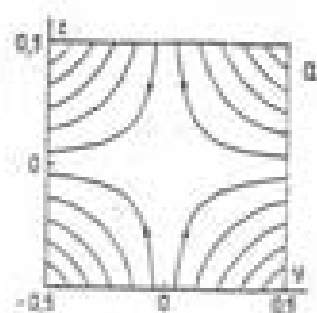
Influence d'une faible non-uniformité du champ magnétique

Neubrand *et al* [1995] étudient l'influence d'une faible non-uniformité de champ magnétique \mathbf{b} , qui se superpose au champ magnétique uniforme vertical imposé \mathbf{B}_0 , considéré suffisamment important pour que le nombre de Hartmann Ha , et le paramètre d'interaction N , soient grands devant l'unité. La section du profil cylindrique impliquée dans cette étude est un cercle. L'avantage de ce profil réside dans le fait qu'il ne sélectionne que des couches de Hartmann le long de la paroi longitudinale.

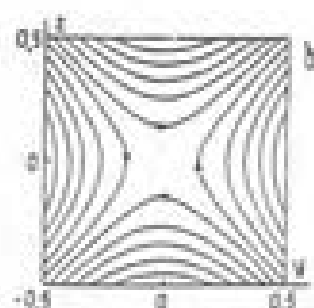
Les auteurs définissent le paramètre de perturbation λ par la relation : $\lambda = \left| \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{B}_0} \right|$. Ce paramètre est supposé faible devant l'unité : $\lambda \ll 1$. Deux types de symétrie sont envisagés pour la géométrie de la perturbation \mathbf{b} : la symétrie de classe I et la symétrie de classe II (figure 13a). A partir de la théorie asymptotique développée par Alboussière *et al* [1993] et d'un développement en perturbations portant sur le paramètre λ , Neubrand *et al* [1995] montrent que dans le coeur MHD, à la densité de courant \mathbf{J}_c vient se superposer une perturbation \mathbf{j}_c . Cette perturbation de la densité de courant est principalement due aux interactions du champ de vitesse non perturbé \mathbf{U}_c avec la perturbation de champ magnétique \mathbf{b} , et de la perturbation du champ de vitesse \mathbf{u}_c avec la partie uniforme du champ magnétique \mathbf{B}_0 . La perturbation de la densité de courant \mathbf{j}_c , représentée sur la figure 13b, possède les propriétés importantes suivantes.

1. Dans le cas où la non-uniformité \mathbf{b} est de classe II, la densité de courant perturbée \mathbf{j}_c se referme naturellement dans le coeur sans passer par les couches de Hartmann *de facto* électriquement inactives. L'ordre de grandeur de la perturbation du champ de vitesse \mathbf{u}_c est donc trouvé égal à $\lambda Gr/Ha^2$.

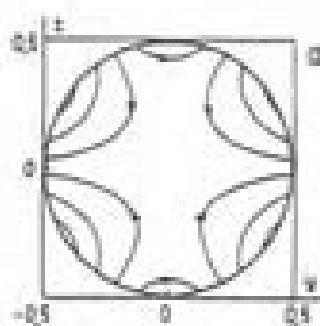
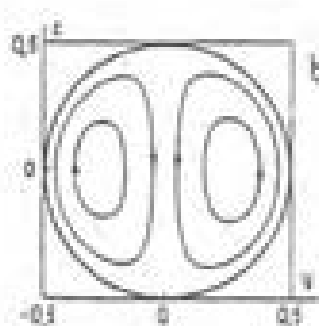
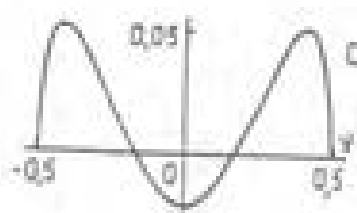
2. Dans le cas où la non-uniformité \mathbf{b} est de classe I, le flux net de la densité de courant perturbée \mathbf{j}_c à travers une section $Y=\text{constante}$ dans le coeur est non nul. En conséquence \mathbf{j}_c se referme *via* les couches de Hartmann qui par suite se trouvent être électriquement actives. L'ordre de grandeur de la perturbation de vitesse \mathbf{u}_c est donc trouvé égal à $\lambda Gr/Ha$. Pour la symétrie de classe I, la perturbation \mathbf{u}_c n'est dépendante que de la coordonnée horizontale Y : le profil $u_c(Y)$ est représenté sur la figure 13c.



Symmétrie de classe I



Symmétrie de classe II

figure 13a. Topologie de b (d'après Neubrand et al [1995]) j pour une symmétrie de classe I j pour une symmétrie de classe IIfigure 13b. Densité de courant j (d'après Neubrand et al [1995]) u_x pour une symmétrie de classe Ifigure 13c. Profil de la perturbation du champ de vitesse u_x
(d'après Neubrand et al [1995])

3.2.3. Conclusions

L'analyse de la bibliographie présentée au paragraphe précédent permet de conclure sur le point fondamental suivant : l'estimation du champ de vitesse dans le coeur MHD d'une configuration G-H ne peut être conduite sans la prise en compte du circuit électrique. La pertinence d'une étude 3-D complète se justifie par cette seule constatation. Pour quelques cas, il est possible de ramener l'étude 3-D d'un écoulement thermogravitaire MHD à une étude 2-D (Garandet *et al* [1992]), mais celle-ci ne peut malgré tout pas prédire l'éventuelle survitesse présente au voisinage des couches parallèles. De toute façon, il est capital de s'assurer que les couches de Hartmann sont prises en compte dans la modélisation 2-D et qu'elles ne sont pas électriquement actives.

3.3. Ecoulement dans un cylindre, régime thermique I ou II

L'étude analytique 3-D de l'écoulement thermogravitaire MHD dans une configuration cylindrique type G-H est réalisée par Cowley [1994]. L'auteur se concentre sur le cas d'un cylindre horizontal dont la paroi longitudinale est adiabatique, électriquement isolante et sur lequel s'applique un champ magnétique uniforme et vertical (figure 14). Le choix d'une section circulaire présente un intérêt immédiat : aucune couche parallèle ne peut se développer sur la paroi non parallèle au champ magnétique imposé. En conséquence, le long de la paroi longitudinale et en particulier dans la zone centrale de la cavité, l'organisation MHD prend la forme d'un coeur MHD uniquement ceinturé par des couches de Hartmann. Ce travail analytique est un élément important qui accompagne l'investigation expérimentale menée dans le cadre de cette thèse. En effet, développée en interaction avec l'expérience MASCOT, la modélisation de Cowley [1994] nous permet d'attacher une interprétation physique à certains des résultats expérimentaux exposés au chapitre III.

Dans une section donnée de la cavité comprise entre les deux extrémités du cylindre, le couplage avec l'équation de l'énergie est considéré. A cause de la convection, la température n'est pas uniforme dans une section. Si un régime mixte diffusio-convectif apparaît, la variation totale de température entre les deux extrémités ΔT , n'est pas occasionnée uniquement par diffusion à travers la cavité. Pour cette configuration G-H élançée horizontalement, le coeur - à ne pas confondre avec le coeur MHD - se définit comme la région centrale où les couches limites thermiques horizontales se développant le long de la paroi horizontale adiabatique se croisent (présence d'un régime établi) ou ne se croisent pas (absence d'un régime établi). Un gradient de température G , est présent et quasi-uniforme sur le coeur. Si la convection est non négligeable G est plus faible que $G_0 = \Delta T / L$ où L est la longueur de la cavité. Ainsi contrairement au cas d'un régime thermique I ou II, le coeur n'est pas le seul responsable de la différence totale de température entre les deux extrémités ΔT .

A travers l'épaisseur des régions d'extrémités, un saut de température $\Delta_s T$, est nécessairement présent pour justifier de la différence totale de température ΔT . Ce phénomène est typique d'un régime thermique III. L'étude analytique de Cowley présentée ci-après modélise un régime I voire II. En conséquence, de faibles sauts de température $\Delta_s T$ sont prédits par l'auteur aux extrémités.

3.3.1. Nombre de Rayleigh modifié

Cowley [1994] met en évidence le nombre de Rayleigh modifié Ra_G , qui prend en compte le couplage de l'équation de l'énergie avec le problème MHD. Bien que pour les métaux liquides le nombre de Prandtl soit faible, l'auteur montre qu'un couplage avec l'équation de l'énergie est présent dès lors que Ra_G devient non négligeable. L'équation de l'énergie adimensionnalisée s'écrit sous la forme :

$$Ra_G (U \cdot \nabla) \theta = \Delta \theta.$$

Le nombre de Rayleigh Ra_G est écrit en prenant pour échelle caractéristique de longueur non pas le diamètre de la cavité mais son rayon R_0 . En effet, pour la modélisation du régime de coeur, l'écart de température pertinent n'est pas l'écart de température ΔT , mais la différence de température $G R_0$:

$$Ra_G = Pr Gt_G / Ha^2 \text{ et } Gt_G = \frac{\beta_0 G R_0^4}{\nu^2}.$$

La figure 14, illustre la description de la configuration G-H étudiée par l'auteur et précise la signification des nouvelles notations adoptées.

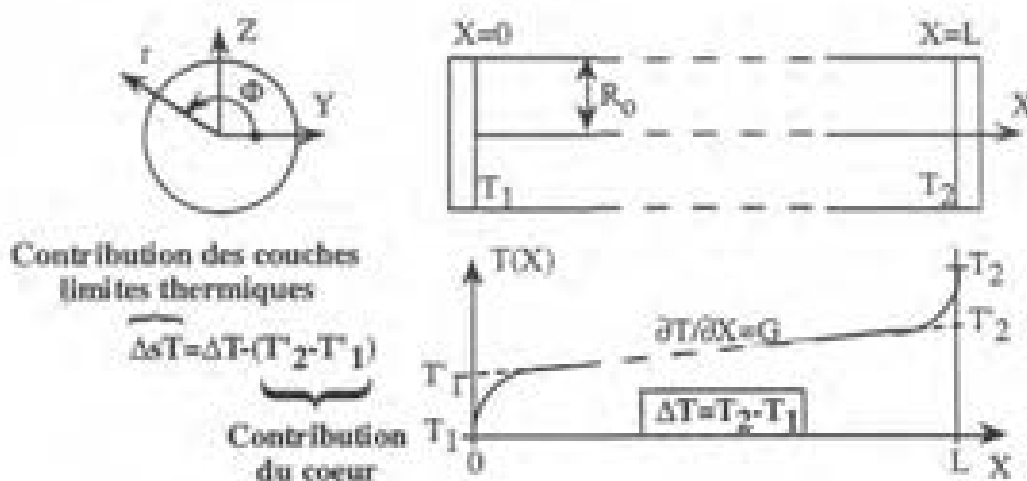


Figure 14. Configuration cylindrique et régime thermique
(d'après Cowley [1994])

3.3.2. Etude analytique développée par Cowley [1994] : principales étapes, principaux résultats

La mise en évidence du nombre de Rayleigh modifié permet de tenir compte de la convection, et plus particulièrement, de la déviation de température $\Theta(Y,Z)$, par rapport à la loi linéaire liée à un régime conductif. Cette déviation $\Theta(Y,Z)$, décrit les différences de température entre le haut et le bas d'une section occasionnées par la convection. Cette déviation de température peut être vue comme une perturbation par rapport à la théorie asymptotique développée par Alboussière *et al* [1993], à nombre de Prandtl nul. Cowley [1994] suppose le nombre de Rayleigh modifié Ra_G faible par rapport à l'unité et s'appuie sur un développement suivant les puissances de ce petit paramètre pour exprimer les champs de vitesse U , de densité de courant J et de température Θ :

$$U = U_0 + Ra_G U_1 + Ra_G^2 U_2 + \dots$$

$$J = J_0 + Ra_G J_1 + Ra_G^2 J_2 + \dots$$

$$\Theta = \Theta_0 + Ra_G \Theta_1 + Ra_G^2 \Theta_2 + \dots$$

En outre, le nombre de Hartmann Ha et le paramètre d'interaction N sont supposés très grands devant l'unité de telle sorte que la force de Laplace domine simultanément sur l'inertie et le frottement visqueux. Le système d'équations aux dérivées partielles mis en place par l'auteur se résume à :

1. l'équation du tourbillon qui exprime l'équilibre entre le couple de la flottabilité et le couple de la force de Laplace,
2. le rotationnel de la loi d'Ohm,
3. les deux lois de conservation de la masse et de la charge électrique,
4. et l'équation de l'énergie.

Contrairement aux parties 3.1. et 3.2., où le champ de vitesse est classiquement adimensionné par v/H (avec ici, $H=R_0$), l'équilibre entre les deux couples en présence, le rotationnel de la force de flottabilité et le rotationnel de la force de Laplace, délivre l'ordre de grandeur U_c du champ de vitesse U :

$$\rho g \beta G R_0 = \sigma U_c B_0^2 \quad \text{soit} \quad U_c = \frac{v}{R_0} \frac{Gr_G}{Ha^2}.$$

Dans cette expression G désigne le gradient de température axial dans le coeur. L'adimensionnement proposé dans la partie 3.1.1. dédiée à la présentation du problème MHD, ne change que par ce nouvel ordre de grandeur du champ de vitesse. Le système d'équations adimensionnées (couplées) sur lequel se base cette étude est le suivant ; remarquons qu'il ne comporte que le seul paramètre Ra_G :

Conservation de la masse	$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0,$	(I.9-1)
--------------------------	--------------------------------	---------

Conservation de la densité de courant	$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0,$	(I.9-2)
---------------------------------------	--------------------------------	---------

Tourbillon	$\nabla \times (\mathbf{J} \times \mathbf{k}) = \nabla \times (-\theta \mathbf{k}),$	(I.10)
------------	--	--------

Rotationnel de la loi d'Ohm	$\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{k}) = \nabla \times (\mathbf{J}),$	(I.11)
-----------------------------	--	--------

Energie	$Ra_G (\mathbf{U} \cdot \nabla) \theta = \Delta \theta.$	(I.12)
---------	--	--------

Le schéma de résolution du système précédent est à tout ordre $O(Ra_G^0)$ du développement asymptotique est :

1. résolution de l'équation de l'énergie (I.12), détermination de θ_0 ,
2. résolution de l'équation du tourbillon (I.10), détermination de \mathbf{J}_0 ,
3. résolution de l'équation du rotationnel de la loi d'Ohm, détermination de \mathbf{U}_0 ,
4. et finalement retour à l'étape 1, où le terme source de l'équation de l'énergie est remis à jour avec \mathbf{U}_0 .

Solution de Cowley [1994] pour la zone de coeur

Dans le coeur, le régime est supposé établi. La solution à l'ordre 0 en Ra_G se confond logiquement avec la solution déterminée par Alboussière *et al* [1993] pour le cas d'une section circulaire. Les lignes de densité de courant en forme de cercles se referment naturellement sur elle-mêmes dans le coeur MHD de l'écoulement. Par suite, les couches limites de Hartmann sont électriquement inactives : l'ordre de grandeur du champ de vitesse dans le coeur MHD de l'écoulement \mathbf{U}_0 , est effectivement $O(Ha^{-2})$. Avec les conditions limites portant sur la température, la distribution de température θ_0 est de toute façon linéaire puisqu'à l'ordre $O(Ra_G^0)$ seul le terme laplacien est conservé dans l'équation de l'énergie. Le champ de vitesse \mathbf{U}_0 correspond donc à un écoulement de fluide chaud dans le haut de la section et à un écoulement retour de fluide froid dans le bas de la section.

Compte tenu de la symétrie du champ de vitesse U_0 (paire suivant Y , impaire suivant Z), la solution à l'ordre $O(Ra_G)$ pour la température Θ_1 , se présente sous la forme d'isothermes incurvées qui tiennent compte de la condition d'adiabaticité à la paroi longitudinale (figure 15a).

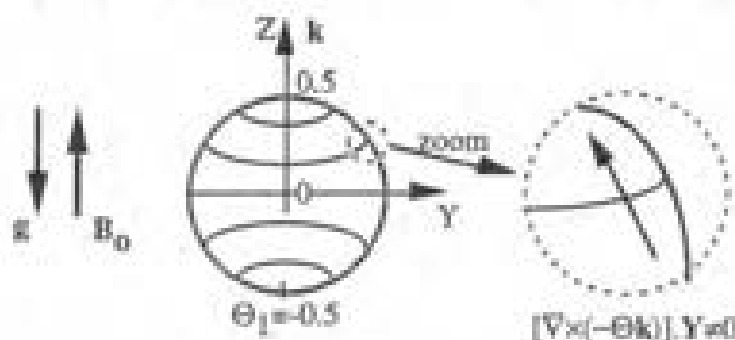


Figure 15a. Solution à l'ordre $O(Ra_G)$ pour la température Θ_1 (d'après Cowley [1994])

La courbure des isothermes et la symétrie par rapport aux deux axes Y et Z de la section étudiée imposent un couple de flottabilité moteur d'un écoulement secondaire et transversal dans la section YZ . Cet écoulement secondaire U_1 , obtenu par la détermination du champ de vitesse à l'ordre $O(Ra_G)$, correspond à quatre vortex présentant une symétrie quadripolaire, figure 15b.

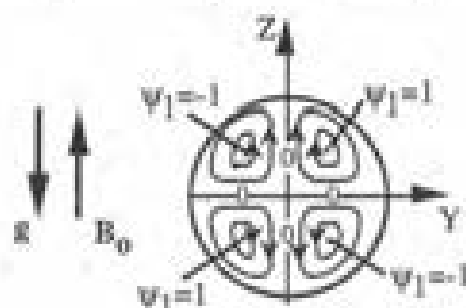


Figure 15b. Solution à l'ordre $O(Ra_G)$ pour la fonction de courant $\Psi_1/96$ (d'après Cowley [1994])

Dans la partie supérieure du cylindre, c'est à dire le haut d'une section YZ , l'écoulement secondaire $Ra_G \cdot U_1$ se superpose à l'écoulement U_0 pour donner lieu à un écoulement hélicoïdal, divergent au voisinage de la paroi. Dans la partie inférieure de la cavité, l'écoulement de retour à l'ordre 0 est dirigé dans l'autre sens, sa superposition avec l'écoulement secondaire $Ra_G \cdot U_1$ va également donner lieu à un écoulement hélicoïdal.

En tirant parti des équations, des conditions aux limites et des propriétés de parité ou d'impairité portant sur les champs de température, de vitesse et de densité de courant, Cowley [1994] démontre que, quel que soit l'ordre $O(Ra_G^n)$, la densité de courant se referme naturellement dans le cœur MHD. Les couches de Hartmann ne contrôlent donc pas l'écoulement.

Solution de Cowley [1994] pour la zone de recirculation

La démarche analytique précédente est reproduite pour le cas plus délicat de l'écoulement de recirculation dans les régions d'extrémités. La couche parallèle à chacune des extrémités du cylindre est supposée d'épaisseur faible δ_0 et d'ordre $O(Ha^{-1/2})$. Un régime de conduction est supposé dans la couche parallèle et implique un profil linéaire de la température Θ à travers cette épaisseur. L'écoulement de recirculation calculé par Cowley [1994], hors de la couche parallèle, prend donc en considération une condition aux limites de Dirichlet pour Θ ainsi qu'une variation possible suivant l'axe X de U , J , et Θ . Pour des ordres $O(Ra_G^n)$, $n > 0$, la solution déterminée par l'auteur décroît en exponentielle sur une distance de l'ordre du rayon, comptée à partir de l'extrémité, pour ne laisser place au-delà qu'à la solution de coeur associée au régime établi et présentée ci-dessus. La solution pour la température à l'ordre 0 en Ra_G , Θ_0 , est évidemment la même que dans la zone de coeur. La solution à l'ordre $O(Ra_G)$, Θ_1 , est représentée sur la figure 15c dans le plan vertical longitudinal du cylindre XZ au voisinage de l'extrémité froide. La condition d'adiabaticité à la paroi longitudinale force les isothermes, $\Theta_1 = \text{constante}$, à se courber. On peut prévoir que cette courbure va engendrer une perturbation d'ordre $O(Ra_G)$ sur le couple de flottabilité qui va se manifester par la présence de deux recirculations contra-rotatives, induites au voisinage de l'extrémité.

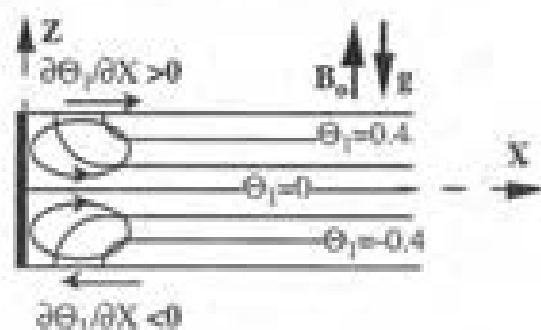


Figure 15c. Solution à l'ordre $o(Ra_G)$ Θ_1 , pour la température (d'après Cowley [1994])

En fait, la solution trouvée par l'auteur pour le champ de vitesse d'ordre $O(Ra_G)$, U_1 , consiste en un champ de vitesse axisymétrique, invariant avec l'angle Φ , dont la projection dans le plan XZ se simplifie effectivement en ces deux recirculations contra-rotatives. La propriété d'axisymétrie peut être comprise comme la nécessité pour les isothermes, $\Theta_1 = \text{constante}$, de se présenter orthogonalement à la paroi longitudinale circulaire afin de satisfaire la condition de flux normal nul.

Sur la figure 15d, la fonction de courant Ψ_1 de l'écoulement d'ordre $O(Ra_G)$ est représentée projetée dans le plan méridien XZ.

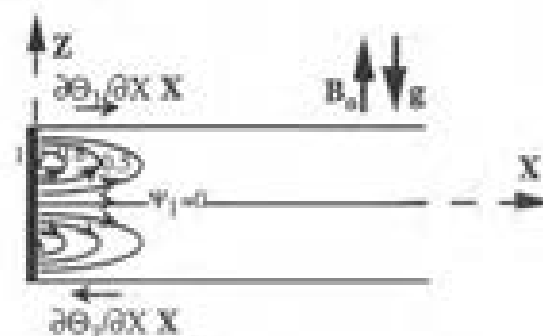


Figure 15d. Fonction de courant de Stokes S_1 , pour l'écoulement d'ordre $O(Ra_G)$ au voisinage de la couche parallèle dans le plan méridien XZ (d'après Cowley [1994])

Dans la zone de coeur, les quatre vortex à symétrie quadripolaire induisent par leur interaction avec le champ magnétique vertical B_0 , un courant axial J_{x1} à l'ordre $O(Ra_G)$. L'équation (L11) (obtenue en prenant le rotationnel de la loi d'Ohm) projetée sur Y, ainsi que la condition de régime établi, implique que dans la zone de coeur, la composante transversale de la vitesse V_1 est égale à J_{x1} . A partir de cette égalité et du signe de V_1 dans la zone de coeur (figure 15b), la carte des isovaleurs de la densité de courant axiale J_{x1} déterminée par l'auteur est interprétable à l'aide de la figure 15e. La composante axiale de la densité de courant électrique J_{x1} est, de même que V_1 , impaire avec Y et Z. Au voisinage de l'extrémité, dans une section localisée dans la zone de recirculation, proche de la couche parallèle, une carte identique est fournie par l'auteur pour J_{x1} qui révèle cette fois une invariance de cette composante de la densité de courant suivant Z (figure 15e). Entre la zone de coeur et la zone de recirculation, il est clair que la composante J_{x1} passe d'un état dépendant des deux variables Y et Z à un état ne dépendant que de Y. Le courant entre dans la couche parallèle si $Y > 0$ et sort de la couche parallèle si $Y < 0$.

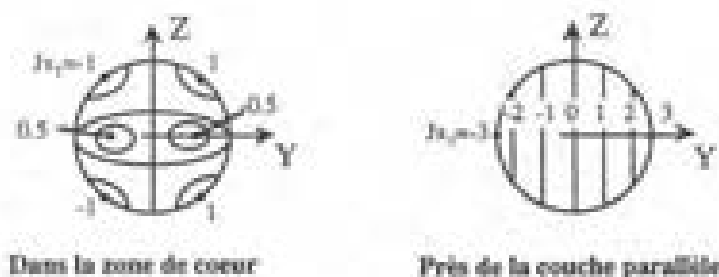


Figure 15e. Isovaleurs de la densité de courant J_{x1} dans deux sections, l'une localisée en zone de coeur (régime établi), l'autre près de l'extrémité (d'après Cowley [1994])

La forte évolution de la densité de courant J_1 avec X entre l'extrémité et la zone de cœur est représentée sur la figure 15f pour trois plans horizontaux de cotes $Z=0$ et $Z=\pm 0.8$. La géométrie axisymétrique du champ de vitesse U_1 , est liée à l'équation du tourbillon (I-10) qui traduit l'équilibre mécanique entre le rotationnel de la force de Laplace $\nabla \times (J \times Z)$, et le couple de flottabilité $\nabla \times (-\Theta Z)$. A l'ordre $O(Ra_G)$, cet équilibre s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial J_{x1}}{\partial Z} \\ \frac{\partial J_{y1}}{\partial Z} \\ \frac{\partial J_{z1}}{\partial Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial \Theta_1}{\partial Y} \\ \frac{\partial \Theta_1}{\partial X} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (I.13)$$

Le système d'équations (I.13), mis en place par Cowley, est formulé en (J, Θ) et tient compte de la conservation de J (équation I.9-2). On en déduit directement que la composante J_{z1} est identiquement nulle. Une fonction de courant H est définie par l'auteur pour la densité de courant J_1 à l'ordre 1 définie comme le champ vectoriel 2-D : $J_1 = (J_{x1}, J_{y1}, 0)$. Autrement dit, la conservation de la densité de courant axiale J_{z1} se traduit par la création d'une composante horizontale J_{y1} supplémentaire, d'ordre $O(Ra_G)$. Cette perturbation d'ordre $O(Ra_G)$ s'ajoute à la composante de densité de courant horizontale J_{y0} d'ordre 0 se conservant via la composante verticale de densité de courant J_{z0} .

Le système (I.13) montre que le gradient $\partial J_{y1}/\partial Z$ est du signe de $\partial \Theta_1/\partial X$. D'après la figure 15c représentant l'évolution de la température $\Theta_1(X, Z)$ dans la zone de recirculation, on peut comprendre que sur la partie inférieure du cylindre ($Z < 0$), $\partial J_{y1}/\partial Z$ sera négatif et sur la partie supérieure du cylindre ($Z > 0$), $\partial J_{y1}/\partial Z$ sera positif. En outre, proche de la couche parallèle, la densité de courant à l'ordre $o(Ra_G)$ n'est plus fonction de la coordonnée Z . Cette observation suggère, d'après (I.13), que la couche parallèle est isotherme. L'évolution de la densité de courant J_1 dans la zone de recirculation (figure 15f) s'explique donc par l'interaction entre les cartes des champs de vitesse, de densité de courant et de température.

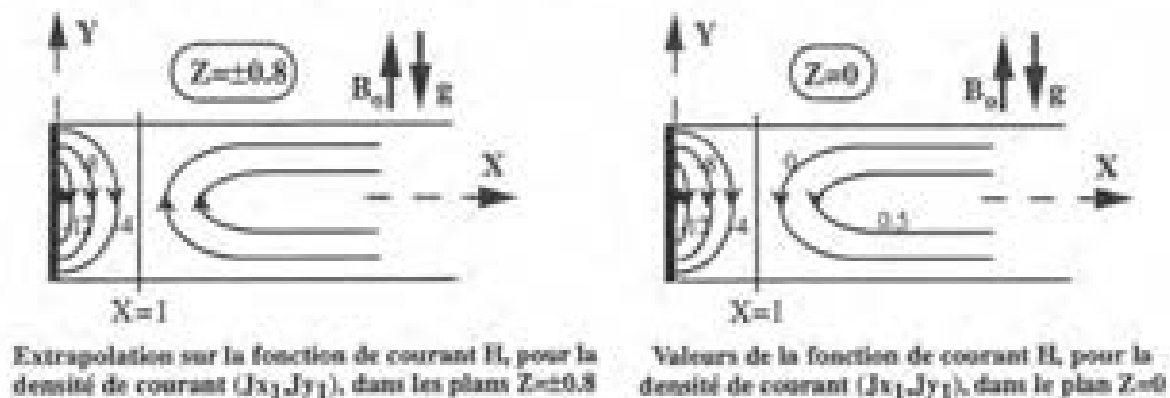


Figure 15f. Evolution de la fonction de courant H , associée à la densité de courant $J_1 = (J_{x1}, J_{y1}, 0)$, d'ordre $O(Ra_G)$

Finalement, il n'est pas nécessaire que les couches de Hartmann deviennent électriquement actives pour permettre la recirculation de l'écoulement. En conséquence, l'ordre de grandeur du champ de vitesse dans le coeur MHD de l'écoulement reste égal à Gr/Ha^2 . On peut prévoir que dans le plan vertical longitudinal XZ, l'ordre de grandeur du champ de vitesse ainsi que les lignes de courant sont bien prédits par la théorie analytique bidimensionnelle de Garandet *et al* [1992]. Pour une évaluation quantitative du champ de vitesse, un point de vue tridimensionnel reste nécessaire.

Dans la zone de recirculation, près de l'extrémité, la température exprimée jusqu'à l'ordre $O(Ra_G)$, ne permet pas de modéliser le saut de température ΔT . La figure 16 illustre l'allure de la température $\Theta = \Theta_0 + Ra_G \Theta_1$ sur les deux génératrices supérieure et inférieure du cylindre inclinées à $\Phi = 90^\circ$ et $\Phi = 270^\circ$ par rapport à Y.

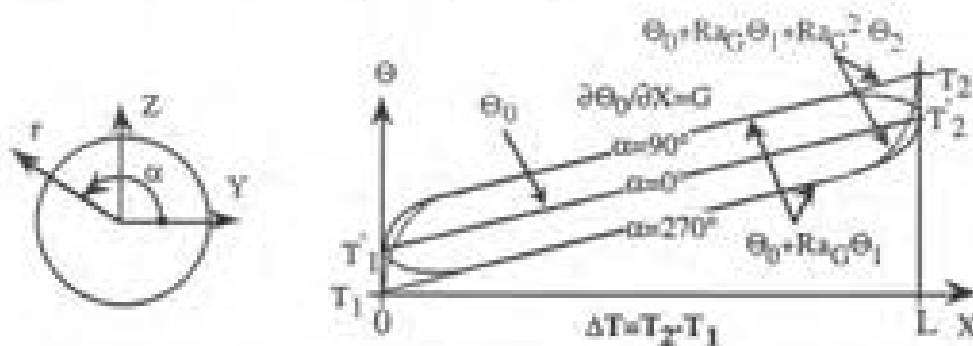


Figure 16. Température totale Θ , exprimée jusqu'à l'ordre $O(Ra_G^2)$,
(d'après l'étude de Cowley [1994])

Le développement asymptotique de Cowley [1994] mené jusqu'à l'ordre $O(Ra_G^2)$ permet de prédire un saut de température ΔT , qui reste modéré par rapport à Θ_1 . Contrairement à la zone de coeur, la température Θ_2 , à l'ordre $O(Ra_G^2)$ n'est plus identiquement nulle au voisinage de la zone de recirculation car l'écoulement n'y est plus établi. Le saut de température prédit par l'auteur vaut : $0.158 \cdot G \cdot R_0 \cdot Ra_G^2$ et présente une invariance avec Z . Cette prédiction analytique n'est applicable qu'à des nombres de Rayleigh très faibles respectant la condition :

$$Ra_G^2 \ll Ra_G \ll 1.$$

La prédiction du saut de température ΔT aux extrémités s'inscrit donc dans la modélisation d'un régime thermique II.

3.4. Régimes thermiques : conjectures

Pour des nombres de Rayleigh effectifs modérés ou importants, $Ra_{\Delta T} \sim 1-100$, une modélisation basée sur un développement en perturbations ne convient plus. Le régime thermique passe d'un régime I - II à un régime III.

Pour le cas d'écoulements thermogravitaires sans champ magnétique, Bejan [1994] montre que deux modélisations distinctes, l'une pour la zone de coeur et l'autre pour la zone de recirculation, sont nécessaires. Les constantes inconnues qui interviennent dans ces deux modélisations sont déterminées par les conditions aux limites et par un raccordement asymptotique entre les solutions associées à chacune des deux zones. Une telle démarche a déjà été adoptée par le passé par Béjan and Tien [1978] via une méthode intégrale pour la modélisation de la zone de recirculation et un raccordement à la solution de coeur de Cornack *et al* [1974]. Les sauts de température aux extrémités sont alors correctement prédits si l'on en juge par l'accord obtenu par ces auteurs avec l'expérience pour le cas de cavités d'élancements finis. Autrement dit, nous pensons qu'une méthode intégrale de ce type pourrait permettre la modélisation d'un saut de température ΔT , du même ordre de grandeur que ΔT , y compris en présence d'un champ magnétique.

Sur la figure 17, nous avons conjecturé la forme des isothermes associées aux trois régimes thermiques typiques que l'on est amené à rencontrer dans une configuration G-H, élancée horizontalement.

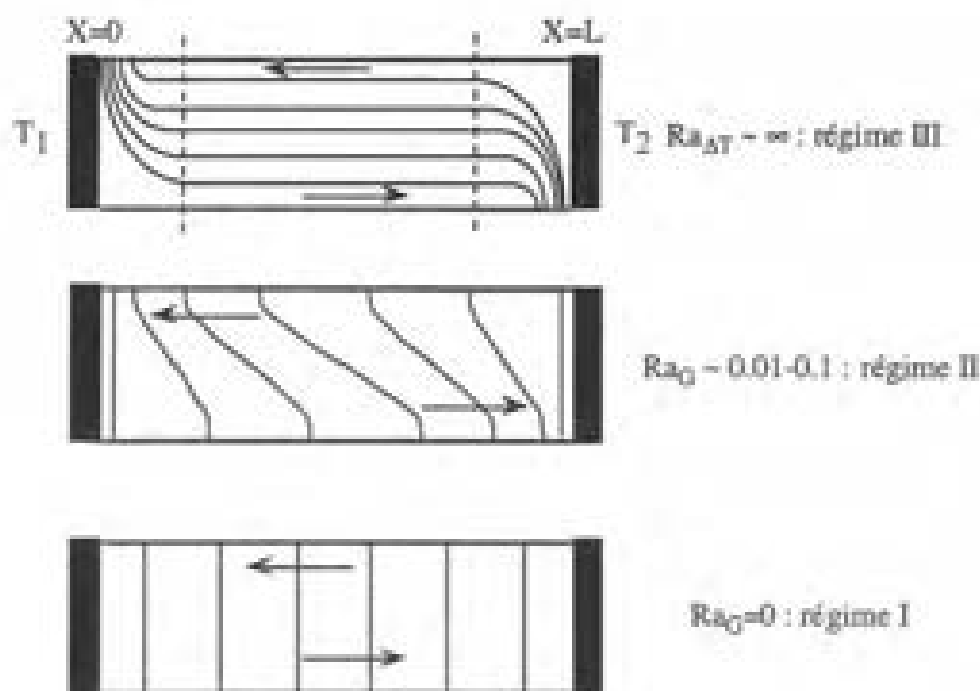


Figure 17. Isothermes associées aux différents régimes thermiques

Dans le cas où le nombre de Rayleigh est associé à un régime III, Cowley [1995] propose une modélisation analytique 2-D de l'écoulement thermogravitaire MHD dans un rectangle élancé. Les hypothèses de l'auteur sont convergentes avec le modèle à convection intense schématisé ci-dessus ($Ra_{\Delta T} = \infty$). Une zone de coeur stratifiée, stagnante, bordée par deux couches limites thermiques supérieure et inférieure à l'intérieur desquelles le fluide s'écoule, est supposée présente.

La recirculation de l'écoulement se concentre dans les deux couches limites thermiques d'extrémités délimitées par des pointillés sur la figure 17. Le gradient de température majoritairement vertical dans la zone de coeur stagnante est supposé uniforme. Entre la zone de coeur et les jets de paroi concentrés dans les couches limites horizontales, Cowley [1995] modélise une couche limite libre cisailée. Ce modèle prédit finalement un nombre de Nusselt Nu , défini par la relation :

$$Nu = 2^{-2/3} (Pr \cdot Gr_{\Delta T})^{2/9}.$$

La condition de validité de ce modèle analytique des transferts de chaleur proposée par Cowley [1995] se traduit par la double inégalité suivante :

$$Ha^3 \ll Pr \cdot Gr_{\Delta T} \ll Ha^{9/2}.$$

4. Conclusion

Quelques rappels essentiels sur la convection naturelle dans les configurations G-H sont proposés au début de ce chapitre. Pour les fluides de faibles nombres de Prandtl, il est établi que les paramètres pertinents sont l'éclatement de la cavité ε , et le groupement $(PrRa_{\Delta T})^{2/3}$ faisant intervenir le nombre de Prandtl Pr , et le nombre de Rayleigh $Ra_{\Delta T}$. Pour le cas de cavités élargies horizontalement $\varepsilon \ll 1$, trois régimes thermiques distincts sont potentiellement rencontrés.

1. $PrRa_{\Delta T} \ll 1$: la conduction impose une distribution linéaire de température le long de la cavité ; une circulation de Hadley s'installe et le régime I s'impose. Le couplage avec l'équation de l'énergie est absent.

2. $\varepsilon(PrRa_{\Delta T})^{1/3} \ll 1$: si le point 1 ci-dessus n'est pas réalisé, l'écoulement sur l'ensemble de la cavité est dicté par une zone de coeur présentant un écoulement parallèle et établi : c'est le régime II.

3. $\varepsilon(PrRa_{\Delta T})^{1/3} \gg 1$: si le point 1 n'est pas réalisé, l'écoulement est guidé par les couches limites thermiques jouxtant les parois de la cavité, il se présente sous la forme de jets de parois : c'est le régime III. Dans ce cas où le régime convectif est intense, le paramètre adimensionnel $Gr_{\Delta T}^{1/2}$, où $Gr_{\Delta T}$ est le nombre de Grashof supposé très grand devant l'unité, est à l'origine de la formation de cellules convectives marginales inertielles qui se forment prioritairement près des couches limites thermiques d'extrémités, dans la zone de recirculation.

Pour la convection naturelle MHD dans les configurations G-H, l'apport nécessaire de la MHD dans la description des phénomènes en jeu est mis en évidence avec l'appui de quelques exemples intéressants disponibles dans la littérature. Les couches de Hartmann contrôlent l'ordre de grandeur du champ de vitesse moyen dans le coeur de l'écoulement. Ce contrôle est dû à l'importance du circuit électrique. Cette importance peut être mise en évidence sur les écoulements thermogravitaires MHD au travers de l'influence de :

la direction du champ magnétique uniforme imposé,

la forme de la section de la cavité,

la sensibilité de l'écoulement à une éventuelle non-uniformité du champ magnétique.

Dans tous les cas, à nombre de Hartmann important, une nouvelle organisation MHD s'impose avec un coeur MHD, des couches de Hartmann et des couches parallèles.

L'effet MHD se ressent sur les transferts de chaleur dans le cadre d'un couplage fort avec l'équation de l'énergie, par la définition d'un nombre de Rayleigh modifié Ra_G . Ce nombre se définit comme :

1. le rapport $PrGr_G/Ha^2$ si les parois de la cavité sont électriquement conductrices, ou lorsque les couches de Hartmann sont électriquement inactives si les parois de la cavité sont électriquement isolantes.
2. le rapport $PrGr_G/Ha$ si les parois sont électriquement isolantes et si les couches de Hartmann sont électriquement actives.

Le calcul analytique 3-D de Cowley [1994] mené sur une configuration cylindrique à la fois pour la zone de coeur et la zone de recirculation est présenté. Une interprétation physique des cartes associées à la température, à la densité de courant électrique et au champ de vitesse, est proposée. Les couches de Hartmann sont électriquement inactives et le champ de vitesse est de l'ordre de $PrGr_G/Ha^2$. Cela suggère donc que l'écoulement thermogravitaire MHD dans le plan médian vertical longitudinal du cylindre est, qualitativement et en termes d'ordres de grandeur, bien prédit par une approche bidimensionnelle.

CHAPITRE II

Expérience MASCOT : matériel, méthodes et mesures pour l'investigation de l'écoulement stationnaire.

Dans ce chapitre, la conception de l'expérience MASCOT (*MAgnetic Stabilisation of COvection and Turbulence*) est présentée et justifiée. L'instrumentation développée sur cette expérience permet un diagnostic local et global de l'écoulement stationnaire. Le diagnostic local fait appel à des capteurs mixtes capables de mesurer à la fois la température et le potentiel électrique. Le diagnostic global, basé sur une évaluation des transferts de chaleur aux extrémités de la cavité impliquée dans l'expérience, repose sur une méthode différentielle de mesure des températures. Nous insistons sur les précautions expérimentales qu'il est nécessaire de prendre pour mener à bien la réalisation de ces mesures, et en particulier, pour s'affranchir de phénomènes thermoélectriques indésirables. Le calcul des erreurs relatives expérimentales est détaillé en annexe I.

1. Introduction

Comme mentionné dans l'introduction de ce mémoire, les substrats à la base de nombreux composants électroniques sont élaborés à partir de monocristaux semi-conducteurs. Ces substrats sont obtenus par croissance cristalline à partir d'un bain fondu dans lequel l'écoulement de convection naturelle peut être laminaire, instable voire turbulent. Campbell and Koster [1994] puis Campbell and Koster [1995], à l'aide d'une visualisation en temps réel aux rayons X, apportent une validation expérimentale de l'influence prépondérante de la convection naturelle pendant la solidification de gallium pur dans une configuration Bridgman horizontale en prouvant par exemple, que l'intensité de la convection peut modifier la forme du front de solidification. La littérature propose d'autres moyens d'investigations pour l'écoulement d'un métal liquide ou d'un semi-conducteur confiné par des parois opaques à la lumière visible. Kakimoto *et al* [1988] visualisent les trajectoires de "particules-traceurs" par radiographies aux rayons X successives. Pool and Koster [1994] exploitent les capacités d'absorption d'un rayonnement X incident par la matière en l'occurrence, le gallium. Le rayonnement X qui émerge est directement dépendant de la densité en tous points du fluide. Pour le cas d'une cavité différentiellement chauffée, ce phénomène physique est exploité. Après numérisation du rayonnement X émergent capté par une caméra CCD puis traitement informatique du signal, une carte 2D de la distribution de température sur le domaine fluide est obtenue par les auteurs. Seul un diagnostic qualitatif de l'écoulement est accessible par ces deux derniers procédés à l'heure actuelle. L'accès à un diagnostic à la fois qualitatif et quantitatif de l'écoulement est possible par l'utilisation de mercure Hg_{203} , isotope du mercure pur. Vivarat-Perrin [1995], en captant le rayonnement gamma associé à un paquet de parcelles fluides Hg_{203} , retrouve les trajectoires ainsi que le champ de vitesse associé à ces parcelles fluides. Cependant, la mise en oeuvre de ce

procédé de mesure requiert un savoir-faire spécifique et demeure peu accessible. Baumgartl *et al* [1993] proposent, pour le cas d'un écoulement thermogravitaire dans la configuration Rayleigh-Bénard, de capter puis d'analyser la distribution du champ magnétique \mathbf{b} , induit par l'interaction entre l'écoulement et le champ magnétique uniforme \mathbf{B}_0 appliqué sur l'écoulement. Cependant, le nombre de Reynolds magnétique calculé pour un écoulement thermogravitaire est très petit devant l'unité (de l'ordre de 10^{-3} à 10^{-2}). En conséquence, pour des champs magnétiques appliqués \mathbf{B}_0 , de l'ordre de quelques mT, les champs magnétiques induits \mathbf{b} mesurés par ces auteurs sont de l'ordre de 10 nT. Expérimentalement, cette méthode ne semble applicable à notre expérience que si \mathbf{b} est de l'ordre de quelques Gauss et s'il se distingue de \mathbf{B}_0 , stationnaire et uniforme, par un caractère instationnaire. Dans ces conditions (difficiles à réunir en réalité), on doit pouvoir distinguer, parmi le champ magnétique total rayonné à l'extérieur de l'expérience, les faibles fluctuations \mathbf{b} de la forte composante permanente \mathbf{B}_0 .

L'expérience MASCOT (*M*agnetic *S*tabilisation of *C*onvection and *T*urbulence) vise précisément à simuler l'écoulement de convection thermogravitaire MHD dans la phase liquide d'une expérience de solidification dirigée en front plan dans la configuration Bridgman horizontale sous champ magnétique permanent, uniforme et vertical. Les résultats expérimentaux obtenus sur cette expérience et analysés aux chapitres III et V dans le cadre de l'investigation expérimentale de l'écoulement stationnaire et instationnaire, confirment que les méthodes précédentes ne peuvent pas s'appliquer avec les moyens technologiques à notre disposition. Sur l'expérience MASCOT, nous avons choisi de mener une investigation locale de l'écoulement au moyen de thermocouples classiques et de sondes de mesure des potentiels électriques. Le champ de température est lié à l'écoulement par l'équation de l'énergie et le potentiel électrique est liée, par ses gradients, au champ de vitesse via la loi d'Ohm. Une investigation globale de l'écoulement est également réalisée dans le cadre de l'estimation des transferts de chaleur.

Ce chapitre est voué à la présentation du matériel, des techniques et des capteurs développés sur l'expérience MASCOT pour étudier l'écoulement lorsqu'il est stationnaire (chapitre III). Dans un premier temps, nous apportons des précisions sur la configuration Bridgman horizontale. Dans un deuxième temps, les caractéristiques générales de MASCOT sont présentées : en même temps, quelques clichés représentatifs de cette expérience sont commentés. Les précautions expérimentales observées en vue de la maîtrise des conditions aux limites thermiques et électriques désirées sont également précisées. Finalement, l'instrumentation, la chaîne de mesures ainsi que les techniques d'acquisition des températures et des potentiels électriques sont présentées à la fin de ce chapitre. Dans un souci de clarté, pour l'investigation expérimentale de l'écoulement instationnaire (transition vers la turbulence), les informations essentielles sur les capteurs et le traitement du signal, nécessairement différents, développés spécifiquement pour cette étude, ne sont apportées qu'au chapitre V intitulé : "Transition vers la turbulence pour un écoulement thermogravitaire MHD".

2. L'expérience MASCOT

2.1. Configuration Bridgman horizontale

La géométrie de la configuration Bridgman horizontale est représentée sur la figure 1 ci-dessous. Elle consiste en un creuset cylindrique fermé de section circulaire. Celui-ci est tiré de la région chaude d'un four vers une région plus froide où le système se solidifie. La phase liquide se différencie de la phase solide par un front de solidification (température T_1). L'ensemble de cette cavité différentiellement chauffée est ainsi soumis à un gradient de température majoritairement axial G . Un couple de flottabilité est ainsi créé et génère un mouvement de convection naturelle assimilable en première approximation à une circulation de Hadley.

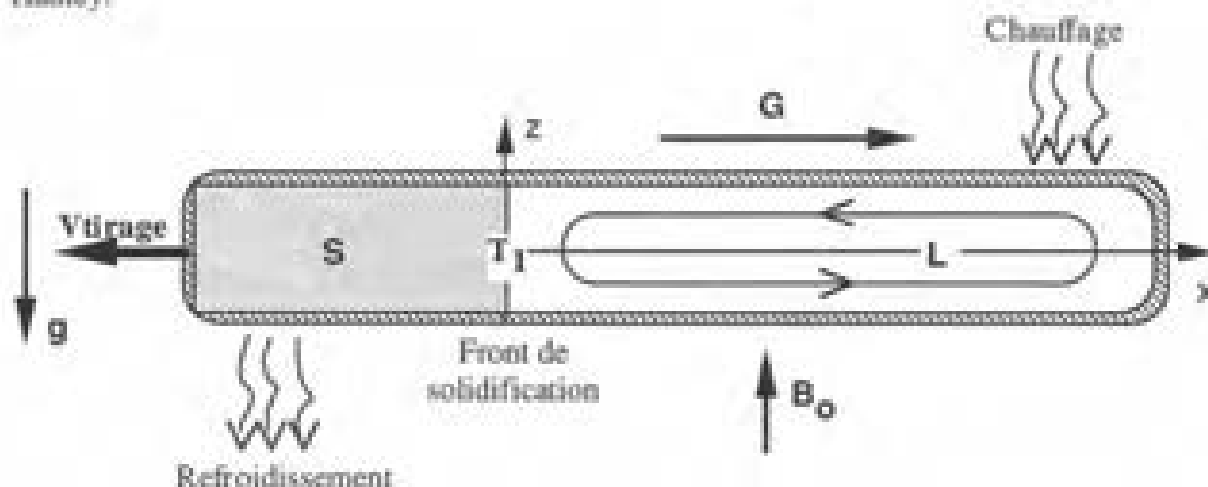


Figure 1. Configuration Bridgman horizontale

2.2. Présentation générale de l'expérience

La figure 2 représente le synoptique général de l'expérience MASCOT. L'élément principal simulant la phase liquide de la configuration Bridgman horizontale est du mercure pur contenu dans une cellule cylindrique de rayon R_0 (20mm) et de longueur L (400mm). Afin de simuler plus particulièrement le cas d'une solidification parvenue à un état d'équilibre stable et permanent, l'éclatement horizontal est choisi important ($\epsilon = R_0 / L = 0.05$) : cela facilite *a priori* la présence d'une zone de cœur. La cellule est limitée à ses deux extrémités par deux flasques épais de cuivre à l'intérieur desquels sont ménagés des labyrinthes où circule de l'eau régulée en température. L'un des deux flasques de cuivre est régulé à la température froide T_1 , l'autre à la température chaude T_2 . Cette expérience, contrairement à la plupart des expériences de solidification réelle, permet de réaliser des mesures *in situ*.

L'instrumentation comporte 55 sondes implantées à la paroi, dites mixtes car elles mesurent à la fois la température (thermocouple) et le potentiel électrique. Par ailleurs, une sonde mobile mixte équipée de cinq sondes permet de réaliser des mesures simultanées de températures et de potentiels électriques à l'intérieur du domaine fluide. Les soudures froides de référence associées aux thermocouples sont toutes rassemblées à l'intérieur d'une boîte isotherme régulée à la température T_0 . La chaîne électronique d'amplification analogique des signaux de température et de potentiel électrique est centralisée dans une armoire régulée à la température T_e dans le but d'éviter le plus possible la dérive des gains. Cette instrumentation est présentée plus en détail dans la partie 3 de ce chapitre.

Comme illustré sur la figure 2, une boucle ouverte alimentée en amont par un régulateur de débit et de pression, branché sur le réseau, alimente en eau l'armoire électronique, la boîte isotherme pour les soudures froides et le front froid de la cellule. Une boucle fermée indépendante, comportant un circulateur, alimente l'extrémité chaude de la cellule. Les températures T_e , T_0 , T_1 et T_2 sont ainsi obtenues à une précision de $\pm 1/100$ K par la présence d'échangeurs de chaleurs asservis par des unités de télécommande PID (à gain Proportionnel-Intégré-Dérivé). Chacun de ces échangeurs est bien entendu localisé juste en amont des organes à réguler thermiquement. Le choix d'une boucle fermée pour la régulation du front chaud se justifie par la pratique. Nous avons pu observer que si les températures T_e , T_0 et T_1 augmentent par pas de quelques dixièmes de degrés alors des échangeurs de chaleurs en série sur une boucle ouverte d'eau, asservis par des télécommandes PID, suffisent à maintenir la précision exigée de $1/100$ K. En revanche, la différence de température entre les deux extrémités de la cellule $\Delta T = T_2 - T_1$, peut atteindre 10 voire 20 K. Le choix d'une boucle fermée indépendante s'impose et l'échangeur de chaleur impliqué dans cette boucle fermée ne rattrape que les quelques centièmes de degrés associés aux pertes vers l'ambiant.

L'ensemble de l'expérience est placé entre les deux pôles d'un électro-aimant fournissant un champ magnétique uniforme et vertical B_0 . En situation réelle, la phase solide d'un semi-conducteur présente une conductivité électrique beaucoup plus faible que sa phase liquide. En conséquence, toutes les parois de la cellule sont électriquement isolantes. Pour la paroi longitudinale en pyrex, cette condition aux limites électrique est naturellement satisfaite. Aux extrémités, les deux flasques de cuivre sont recouverts d'une couche de téflon électriquement isolante. Reconnaisable sur le cliché photographique n°1 par la couleur verte de la face interne des flasques, cette couche de téflon est suffisamment fine (épaisseur de l'ordre de 100 μ m) pour ne pas gêner la réalisation des conditions aux limites de Dirichlet aux extrémités de la cellule de températures T_1 et T_2 .

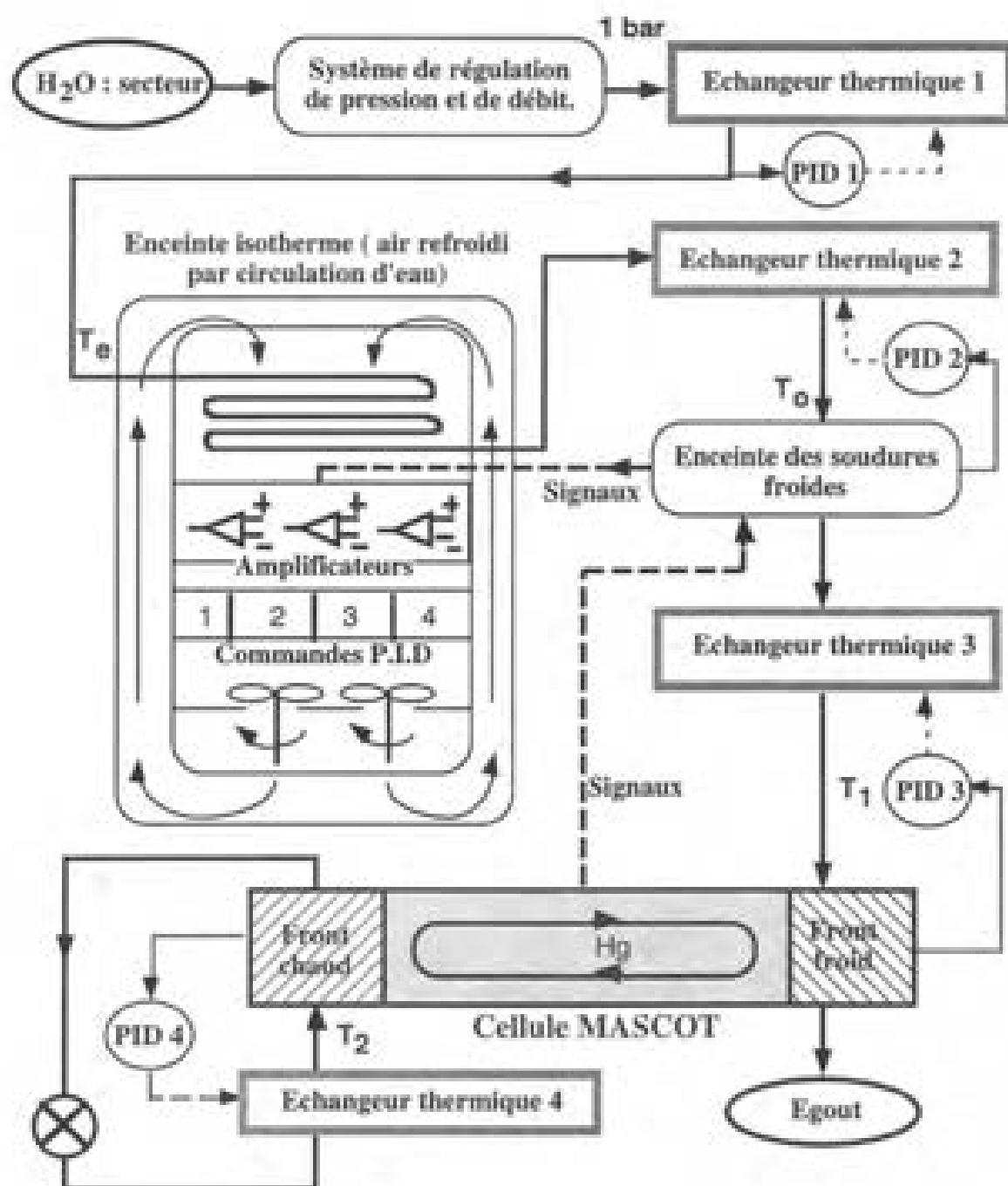


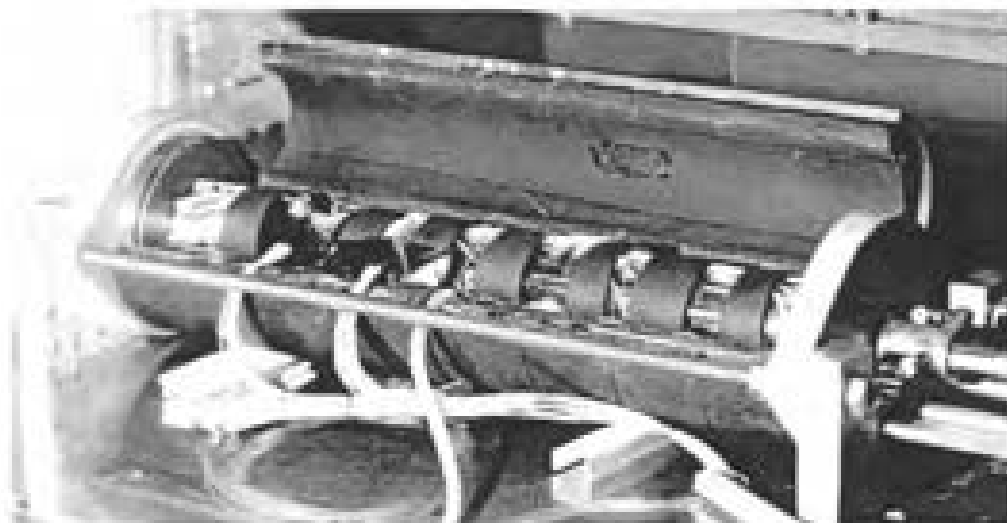
Figure 2. Synoptique général de l'expérience MASCOT

2.3. Précautions expérimentales

2.3.1. Conditions aux limites thermiques

Afin de simplifier l'étude de l'écoulement thermogravitaire rencontré dans une configuration Bridgman horizontale, un gradient axial et uniforme G , doit être imposé de manière précise. A cette fin, une épaisse couverture d'isolant thermique est enroulée longitudinalement autour de la cellule. Cette précaution ne suffit pas à imposer une condition de Neumann sur la température à la paroi longitudinale de la cellule. Des simulations numériques menées dans le cadre du dimensionnement d'une autre expérience (expérience BRAHMS, Neubrand [1995]) ont permis de mettre en évidence le fait que l'interposition d'un écran adiabatique en cuivre joignant les deux flasques de cuivre autour de la cellule enveloppée d'isolant thermique, permet d'obtenir un gradient de température axial uniforme à mieux que 1% de précision. Sur le cliché photographique n°1, le cache adiabatique se trouve exceptionnellement en position ouverte et laisse entrevoir la cellule en verre pyrex bordée par les deux flasques de cuivre.

L'imposition de températures T_1 et T_2 uniformes aux fronts de la cellule est directement dépendante de la valeur du débit de l'eau dans les deux boucles de régulation. A l'aide de mesures de température effectuées avec la sonde mobile mixte sur la face interne du front chaud de la cellule, sur la partie supérieure, nous établissons que pour un débit supérieur à 3 l/min, les écarts relatifs de température (par rapport à la différence de température $T_2 - T_1$ imposée entre les deux fronts) mesurés sont inférieurs à 0.1%. Nous estimons que l'uniformité ainsi que les conditions de Dirichlet recherchés sur les températures des fronts sont donc obtenues.



Cliché photographique n°1 : Vue sur la veine de l'expérience

2.3.2. Champ magnétique

L'uniformité, la symétrie et la stabilité du champ magnétique délivré par l'électro-aimant de MASCOT ont été contrôlées. L'étude théorique menée par Neubrand *et al* [1995] démontre qu'une faible perturbation de l'uniformité du champ magnétique imposé sur un écoulement thermogravitaire MHD peut, si elle possède une symétrie bien définie (symétrie de classe I), engendrer une perturbation du champ de vitesse Ha fois plus importante (Ha désigne le nombre de Hartmann supposé grand devant l'unité). C'est principalement pour cette raison qu'une carte 3-D de la composante verticale du champ magnétique délivré par l'aimant a été réalisée sur le volume occupé par la cellule. L'appareil de mesure utilisé est un gaussmètre sur lequel se branche une sonde à effet Hall. La précision de cet appareil est de $\pm 0.5 \cdot 10^{-4}$ T.

Uniformité du champ magnétique dans l'espace

Afin de positionner la sonde à effet Hall précisément dans l'espace, un cube dans lequel sont pratiqués avec précision des alésages, permet de disposer d'un maillage composé de sept points de mesures sur l'axe vertical Z par 5 points de mesures sur l'axe transversal Y (figure 3). La réalisation de cette carte 3D consiste à positionner le cube en plusieurs localisations sur l'axe X de la cellule. La composante verticale du champ magnétique B_z est alors mesurée en différentes sections transversales YZ choisies sur l'ensemble du volume occupé par la cellule à l'intérieur de l'entrefer de l'électro-aimant. Les dimensions de cet entrefer sont : $(L \cdot l \cdot H) = (560\text{mm} \cdot 190\text{mm} \cdot 180\text{mm})$ où L, l et H sont respectivement la longueur suivant l'axe X de la cellule, la largeur suivant l'axe transversal Y, et la hauteur suivant l'axe vertical Z.

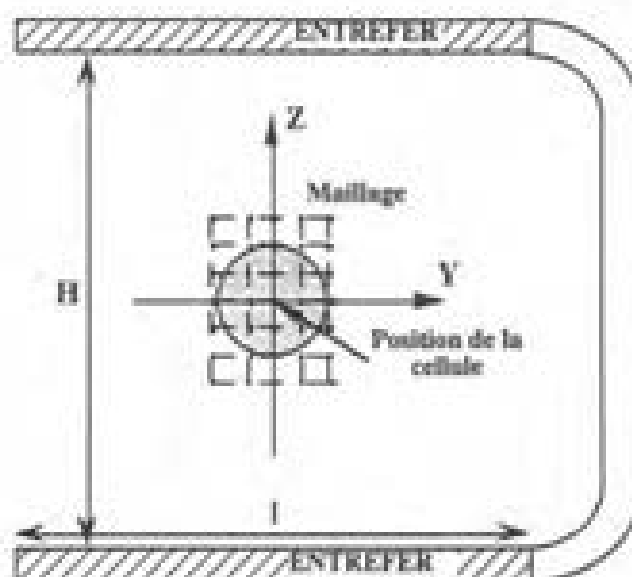


Figure 3. Maillage pour la réalisation de la carte 3D de B_z dans une section de l'expérience MASCOT (schéma à l'échelle 1:2.8)

Nous représentons sur les figures 4a et 4b, les cartes des isovaleurs de la composante B_z réalisées pour $H_a = 58.7$, sur deux sections occupées par la cellule :

- dans la section où est localisée le centre de la cellule ($X = 200\text{mm}$), le champ est le plus uniforme ;
- dans la section de l'espace où est localisée le front chaud de la cellule ($X = 400\text{mm}$), les non-uniformités mesurées sont les plus importantes.

Ces cartes des isovaleurs de B_z sont tracées à partir des mesures discrètes effectuées aux noeuds du maillage précédemment représenté sur la figure 3. Des interpolations quadratiques sur un maillage plus raffiné et un post-processing sont menés sous MATLABTM ; une visualisation directe de nos mesures est ainsi accessible. Les plus fortes inhomogénéités du champ magnétique apparaissent aux extrémités de la cellule. Elles sont attribuées au voisinage des effets de bords concentrés à la frontière de l'électro-aimant. Le pourcentage d'inhomogénéité mesuré reste cependant indépendant de la valeur du champ magnétique programmé. Ainsi sur l'ensemble du volume de mercure contenu dans la cellule, les inhomogénéités axiale, verticale et transversale ne dépassent pas respectivement : 1.8%, 1.65% et 0.44%. Dans le cas où ces non-uniformités de champ magnétique engendreraient des couches de Hartmann électriquement actives, des changements ne seraient perceptibles qu'au-delà d'une valeur seuil du nombre de Hartmann de l'ordre de 100. Nous verrons au chapitre III que nos mesures de températures et de potentiels électriques ne suggèrent pas qu'un tel phénomène se produise.

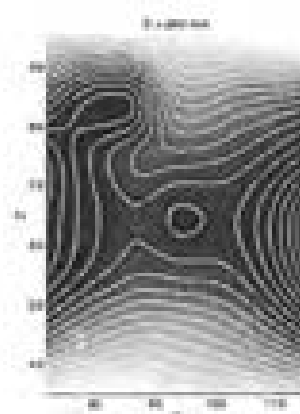


Figure 4a.

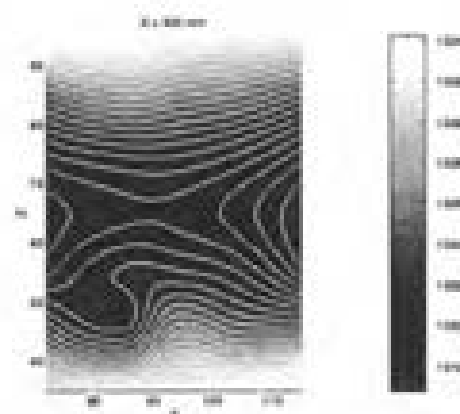


Figure 4b.

Carte des isovaleurs de la composante verticale B_z , du champ magnétique (en Gauss) pour deux sections représentatives de la cellule.

Stabilité du champ magnétique dans le temps

L'alimentation de l'électro-aimant est assurée par un générateur de courant continu remarquablement stable dans le temps. Cette stabilité, obtenue sur une plage allant de 0 à 150 Ampères (soit de 0 à 0.6135T), est assurée par asservissement du générateur via une électronique spécifique. Une précision de $\pm 1\text{mA}$ sur le courant délivré permet une précision de $\pm 0.4 \cdot 10^{-4} \text{ T}$ sur la composante uniforme du champ magnétique B_0 . Sur une heure, à la précision près du gaussmètre utilisé, aucune dérive n'est détectée.

Direction du champ magnétique, horizontalité de l'expérience

Les moyens technologiques à disposition ne permettent pas la détermination directe de la direction du champ magnétique. En supposant que celui-ci est orthogonal aux deux pôles polaires supérieure et inférieure, ce problème est contourné en assurant leur horizontalité et leur parallélisme. L'horizontalité de l'aimant est réglée par l'intermédiaire de vérins à vis réglables anti-vibratoires et d'un niveau à eau de précision : $\pm 0.05\text{mm/m}$. A l'échelle de la cellule, l'inclinaison entre la direction du champ magnétique et la pesanteur est par conséquent négligeable.

Aimantation rémanente

Les propriétés ferromagnétiques des semelles de fer doux collées sur les pôles de l'électro-aimant accentuent les phénomènes non-linéaires tels que hystérésis magnétique et aimantation rémanente. Par le terme hystérésis magnétique, nous désignons le fait que le champ magnétique peut ne pas suivre la même loi lorsqu'il croît puis décroît. En pratique, ce phénomène disparaît si le champ magnétique produit par l'électro-aimant est augmenté ou diminué par incréments suffisamment faibles. En revanche, aucune parade n'a pu être proposée pour contrer l'aimantation rémanente dont l'intensité est constante et égale à $15 \pm 5 \text{ Gauss}$. En conséquence, les résultats expérimentaux présentés dans ce mémoire sont représentés en fonction du nombre de Hartmann H_a , ou du nombre de Rayleigh modifié Ra_G , après compensation de cette aimantation rémanente. L'erreur absolue commise lors de cette compensation entraîne une erreur relative sur l'évaluation des nombres H_a et Ra_G (annexe II).

2.3.3. Conception de la cellule

Choisir comme matériau le pyrex pour concevoir la cellule peut sembler discutable. Au chapitre I, l'importance de la symétrie de la section à grands nombres de Hartmann est soulignée à partir de l'étude théorique menée par Alboussière *et al* [1993]. Un autre matériau tel que le plexiglas, par exemple, se prête plus difficilement que le pyrex à des conditions de coaxialité sévères. En outre, des réactions chimiques avec le mercure sont susceptibles de se produire à plus ou moins long terme modifiant notablement la valeur des caractéristiques

physiques du fluide impliqué. Le pyrex présente une neutralité chimique avec le mercure à très long terme.

2.3.3. Remplissage de la cellule par le mercure

Le mercure est réactif en contact avec l'oxygène et dès lors, ses caractéristiques physiques évoluent très rapidement. Autrement dit, le remplissage de la cellule doit être réalisé sous atmosphère contrôlée. Avant l'opération de remplissage, un vide primaire puis un remplissage d'argon U (réducteur d'oxygène) sont réitérés dans la veine de l'expérience afin de faire disparaître toutes traces d'oxygène. Enfin, l'opération de remplissage de la cellule consiste à pousser l'argon U présent dans la cellule par du mercure pur ; lequel est également poussé avec de l'argon U sous pression. Une fois cette opération réalisée, l'amenée pour le remplissage est fermée. L'argon initialement contenu dans la cellule est comprimé et maintient une pression légèrement supérieure à 1 atm.

2.4. Caractéristiques physiques du mercure

Quelques informations sur les caractéristiques physiques du mercure, pertinentes dans ce problème de convection thermogravitaire MHD, sont reportées dans le tableau ci-dessous. Nous notons ν , β , ρ , σ , λ , α , C_p , T_1 , T_2 , respectivement la viscosité moléculaire, le coefficient d'expansion volumique à pression constante, la densité, la conductivité électrique, la conductivité thermique, la diffusivité thermique, la chaleur massique à pression constante, les températures extrêmes des fronts froid et chaud de la cellule. Ces informations sont tirées de la littérature : Eckert and Drake [1959], Cobbery [1979] ; leur importance se justifie par exemple dans la justification du bien-fondé de l'approximation de Boussinesq.

Caractéristiques physiques	$T_1 = 0^\circ\text{C}$	$T_2 = 50^\circ\text{C}$
$\nu \text{ (m}^2/\text{s)}$	$1.24 \cdot 10^{-7}$	$1.04 \cdot 10^{-7}$
$\beta \text{ (K}^{-1}\text{)}$	$1.81 \cdot 10^{-4}$	$1.81 \cdot 10^{-4}$
$\rho \text{ (kg / m}^3\text{)}$	13628	13506
$\sigma \text{ (kg m / s}^2\text{ / V}^2\text{)}$	$1.06 \cdot 10^6$	$1.01 \cdot 10^6$
$\lambda \text{ (kg m / s}^3\text{ / K)}$	8.20	9.40
$\alpha \text{ (m}^2/\text{s)}$	$43 \cdot 10^{-7}$	$50.2 \cdot 10^{-7}$
$C_p \text{ (m}^2/\text{s}^2\text{ / K)}$	140.3	138.6

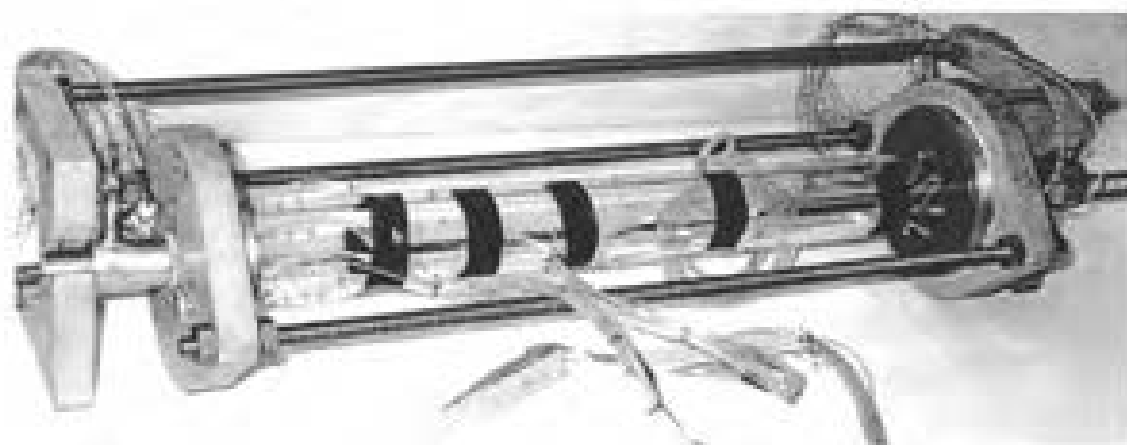
Ces caractéristiques physiques correspondent aux températures extrêmes potentiellement rencontrées par le mercure dans l'expérience. Pour la valeur de β , les variations sont très faibles. Pour un écart de température de 50°C , l'approximation de Boussinesq demeure très acceptable puisque l'erreur relative commise sur la valeur moyenne de ρ reste inférieure à 1%.

3. Instrumentation

L'instrumentation, la chaîne de mesure, le protocole expérimental adopté ainsi que le système d'acquisition sont présentés. En plus des 55 capteurs mixtes implantés à la paroi longitudinale, des précisions sont apportées sur la sonde mobile mixte, désignée par la suite par "SMM", conçue pour réaliser à la fois des mesures de température et de potentiels électriques à l'intérieur du domaine fluide sur l'écoulement stationnaire. Cette sonde mobile mixte (SMM) est à distinguer de la double sonde mobile (DSM) présentée au chapitre V, construite spécifiquement pour étudier l'écoulement instationnaire hors de propos dans ce chapitre. Nous mettons l'accent sur les moyens expérimentaux développés pour s'affranchir d'effets thermoelectriques indésirables amenés à se superposer aux potentiels électriques d'origine MHD.

3.1. Sondes pariétales

Des sondes mixtes (55) sont implantées sur 11 demi-cercles. Sur la figure 5 nous indiquons la localisation de ces sondes mixtes pariétales. Trois demi-cercles de sondes se répartissent sur la zone centrale au premier quart, au centre et au troisième quart de la cellule : la zone de cœur de l'écoulement est supposée s'y établir en priorité. Six demi-cercles de sondes sont concentrés dans la zone de recirculation de l'écoulement, côté front froid, en vue de l'étude détaillée de l'écoulement de recirculation. Deux autres demi-cercles sont localisés au voisinage de l'extrémité chaude afin de tester la symétrie centrale de l'écoulement (cf. chapitre I). La cellule possède par ailleurs la possibilité de pivoter autour de son axe principal X, par pas de 5 degrés. Le cliché photographique n°2 (côté droit), montre que cette option est aisément obtenue au moyen d'une vis permettant le réglage de l'inclinaison de la cellule. La réalisation de mesures rapprochées sur une même circonférence est donc possible. Les sondes mixtes pariétales, dont l'implantation sur la cellule est visible sur le cliché n°2, sont constituées de deux fils constantan et platine de même diamètre (100 μ m).



Cliché photographique n°2 : Cellule et instrumentation

Dans un trou de 1mm de diamètre ménagé à travers la paroi longitudinale de la cellule de pyrex, les deux fils sont placés l'un à côté de l'autre, électriquement isolés par un vernis et sans soudure à l'extrémité. L'ensemble est ensuite rigidifié par une colle époxy dont le rôle est également d'assurer l'étanchéité de la cellule. Après rodage uniforme de la surface interne de la cellule, chacune des deux pointes platine et constantan effleure la surface du domaine fluide.

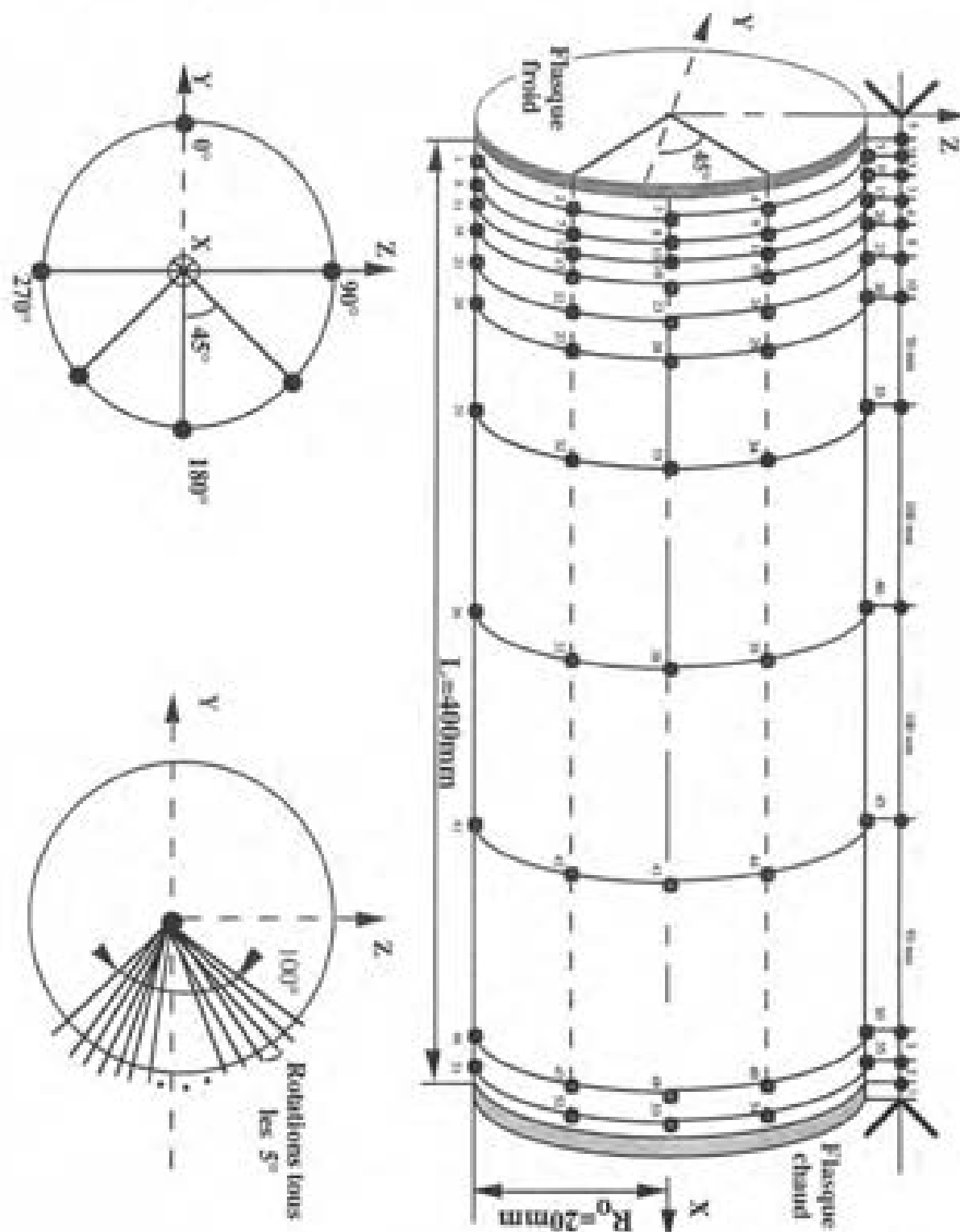


Figure 5. Localisation des sondes mixtes pariétales.

3.1.1. Traitement chimique et contact électrique

Un traitement chimique spécifique permet d'obtenir un excellent contact électrique entre les deux pointes platine-constantan et le mercure. La première opération de ce traitement est un nickelage des sondes par déposition électrolytique d'une fine couche d'alliage nickel/phosphore (procédé Niklad 794). La procédure suivante consiste en une superposition d'une mince couche d'argent effectuée également par déposition électrolytique (procédé Capargent). Au final, dès le premier contact avec le mercure, un amalgame se forme à l'extrémité de chacun des deux fils par oxydoréduction. Cet amalgame assure le contact électrique.

3.1.2. Mesure des températures

Cette mesure fait intervenir le couple thermoélectrique constantan/platine ainsi que la boîte isotherme aux soudures froides. Le principe de la mesure ainsi que la chaîne de traitement analogique sont schématisés sur la figure 6. Une amplification de gain A_m , égale à $500 \pm 5\%$, puis un filtrage passe-bas de fréquence de coupure à 15Hz, permettent de produire une tension S_m , qui s'exprime comme le produit de A_m par le signal S_{T_m} à mesurer, auquel s'ajoute un offset $\text{Offset}(m)$, généré par l'électronique :

$$S_m = A_m * S_{T_m} + \text{Offset}(m).$$

La notation "m" se réfère au point m où la mesure de température T_m est réalisée.

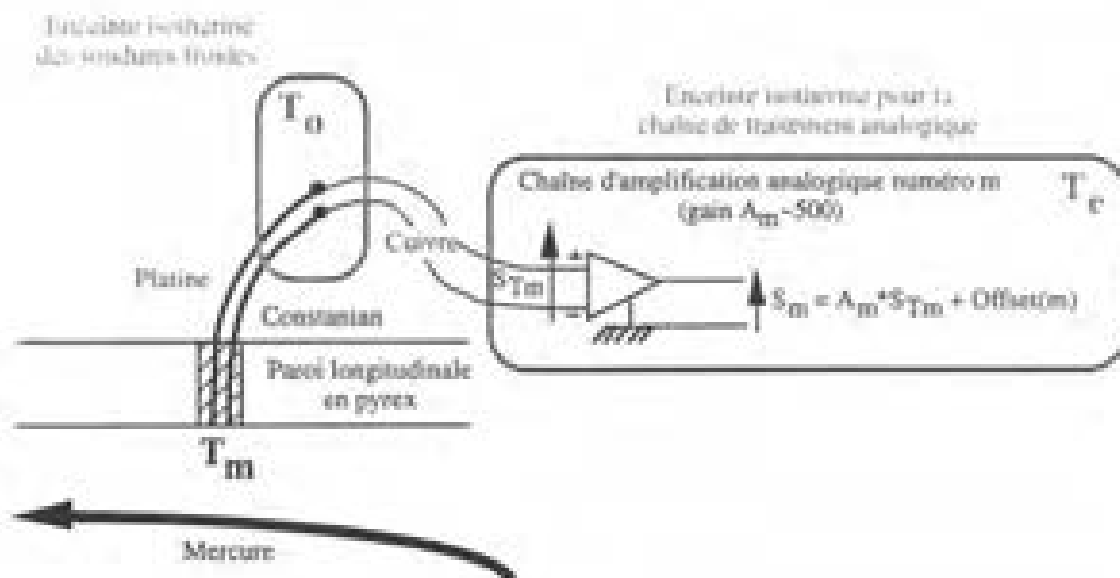


Figure 6. Mesure des températures à la paroi longitudinale de la cellule

Considérons que l'entrée de la chaîne électronique est d'impédance infinie comme pour un amplificateur opérationnel classique. Dans ce cas, l'intégration de la loi d'Ohm le long du circuit électrique situé entre le point de mesure m et la chaîne électronique se réduit à l'expression suivante pour la tension S_{Tm} :

$$S_{Tm} = P_{\text{Platine/Constantan}} (T_m - T_o),$$

où $P_{\text{Platine/Constantan}}$ désigne le pouvoir thermoélectrique relatif entre les métaux platine et constantan. Ce pouvoir thermoélectrique, de l'ordre de $40 \mu\text{V/K}$ à 25°C , évolue très faiblement avec la température. En conséquence le protocole expérimental suivant pour les mesures de température est adopté.

1. Programmation de l'isotherme froide T_1 sur toute la cellule : $T_2 = T_m = T_1$.
2. mesures de S_1 et Offset (1),
3. programmation de l'isotherme chaude T_2 sur toute la cellule : $T_1 = T_m = T_2$.
4. mesures de S_2 et Offset (2),
5. programmation d'un écart de température ΔT entre les deux fronts puis installation d'un écoulement thermogravitaire MHD,
6. mesures des 55 tensions S_m (55 sondes) et des 55 offsets associés, Offset (m).

L'enceinte contenant la chaîne analogique est également régulée à $\pm 1/100\text{K}$ à la température T_o , les gains A_m , sont par conséquent stables dans le temps. La valeur moyenne de A_m mesurée sur les voies est de 500. Les écarts relatifs mesurés autour de cette valeur moyenne ne dépassent pas $\pm 5\%$. En revanche, une mesure simultanée des tensions S_m et des offsets électroniques Offset(m) associés est nécessaire. La forte dérive électronique des offsets, notable sur une échelle de temps de l'ordre de quelques heures seulement, est ainsi compensée. L'écart de température imposé ($T_2 - T_1$), est mesuré à 0.1 K près. Les distributions de températures présentées au chapitre III sont référencées par rapport à la température du front froid et sont finalement obtenues par la relation suivante appliquée aux m signaux de température S_m mesurés :

$$T_m - T_1 = (T_2 - T_1) * \frac{[(S_m - \text{Offset}(m)) - (S_1 - \text{Offset}(1))]}{[(S_2 - \text{Offset}(2)) - (S_1 - \text{Offset}(1))]}.$$

3.1.2. Mesure des potentiels électriques

Certaines caractéristiques du champ de vitesse peuvent être mises en évidence dans les écoulements MHD par la mesure des potentiels électriques. En effet, leur gradient est lié au champ de vitesse et à la densité de courant électrique dans le cœur MHD de l'écoulement par la loi d'Ohm. En outre, on peut montrer que le potentiel électrique possède la propriété intéressante de rester constant sur l'épaisseur de la couche de Hartmann (Moreau [1990]). Dans l'expérience MASCOT, des différences de potentiels électriques sont mesurées par deux fils platine placés en deux points distincts de la paroi longitudinale de la cellule. Par les indices m et n , nous désignons les températures ainsi que les potentiels électriques qui se réfèrent aux points m et n (figure 7 ci-dessous).

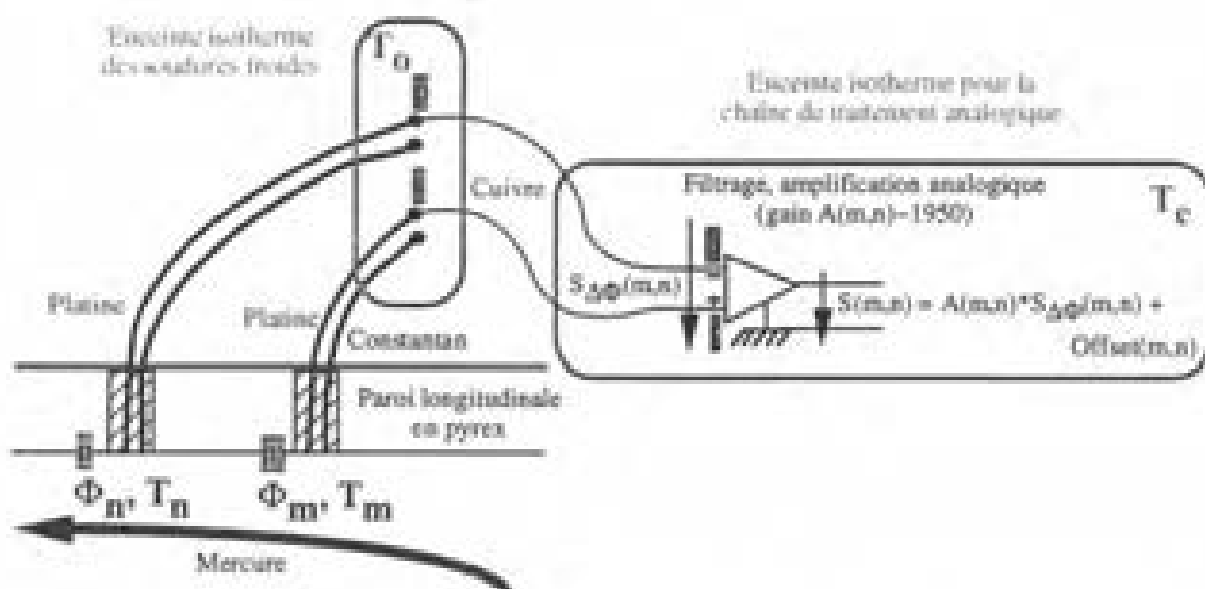


Figure 7. Mesures des potentiels électriques à la paroi longitudinale de la cellule.

Le signal $S_{\Delta\Phi}(m,n)$ s'exprime comme la différence de potentiel entre les points m et n à laquelle s'ajoute une contribution thermoélectrique. L'expression de $S_{\Delta\Phi}(m,n)$ est déterminée par la loi d'Ohm (II.1) :

$$\frac{\mathbf{J}}{\sigma} = -\nabla\Phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0 - P \cdot \nabla T \quad (\text{II.1})$$

où \mathbf{J} , \mathbf{u} , P et Φ désignent respectivement la densité de courant, le champ de vitesse, le pouvoir thermoélectrique absolu considéré et le potentiel électrique. L'application de la relation (II.1) au circuit électrique (m, n, p, q, r, s), esquissé sur la figure 7, permet d'exprimer les tensions sur chacun des éléments $[m-n]$, $[n-p]$, $[p-q]$, $[q-r]$, $[r-s]$, et $[s-m]$:

$$\text{entre n et p : } \phi_p - \phi_n = P_{\text{Platine}} * (T_n - T_p), \quad (\text{II.2-1})$$

$$\text{entre p et q : } \phi_q - \phi_p = P_{\text{Cuiyre}} * (T_p - T_q), \quad (\text{II.2-2})$$

$$\text{entre q et r : } \phi_r - \phi_q = S_{\Delta\phi}(m, n), \quad (\text{II.2-3})$$

$$\text{entre r et s : } \phi_s - \phi_r = P_{\text{Cuiyre}} * (T_r - T_s), \quad (\text{II.2-4})$$

$$\text{entre s et m : } \phi_m - \phi_s = P_{\text{Platine}} * (T_s - T_m), \quad (\text{II.2-5})$$

$$\text{entre m et n : } \phi_n - \phi_m = \int_m^n \left[U \times B_n - \frac{J_{\text{mes}}}{\sigma} \right] ds + P_{\text{Hg}} * (T_m - T_n), \quad (\text{II.2-6})$$

où

$$\int_m^n \left[U \times B_n - \frac{J_{\text{mes}}}{\sigma} \right] ds = [\phi_n - \phi_m]_{\text{mes}}. \quad (\text{II.2-7})$$

Les notations U , J_{mes} , et $[\phi_n - \phi_m]_{\text{mes}}$, désignent respectivement le champ de vitesse, la densité de courant électrique et la différence de potentiels électriques dans le mercure. La valeur de ces grandeurs est prédite, à nombres de Hartmann élevés, par la théorie asymptotique d'Alboussière *et al* [1993] dans la zone centrale de la cellule où le régime peut être supposé établi. L'expression du signal avant amplification $S_{\Delta\phi}(m,n)$, s'exprime par la relation suivante (II.3-1), déduite des relations (II.2-1) à (II.2-7) :

$$S_{\Delta\phi}(m, n) = P_{\text{Platine}/\text{Hg}} * (T_m - T_n) + [\phi_m - \phi_n]_{\text{mes}}. \quad (\text{II.3-1})$$

On en déduit l'expression du signal mesuré $S(m,n)$, après amplification :

$$S(m, n) = A(m, n) * \frac{P_{\text{Platine}/\text{Hg}} * (T_m - T_n) + [\phi_m - \phi_n]_{\text{mes}}}{S_{\Delta\phi}(m, n)} + \text{Offset}(m, n) \quad (\text{II.3-2})$$

Cette expression du signal mesuré $S(m,n)$, fait intervenir le couple thermoélectrique Platine/Mercure. Les mesures du pouvoir thermoélectrique absolu du mercure par P_{Hg} , réalisées par Marwaha and Cusack [1965], indiquent une variation linéaire de P_{Hg} en fonction de la température beaucoup plus marquée que pour les autres métaux liquides (gallium, étain ...etc.). Ces auteurs déterminent par régression linéaire la relation suivante :

$$P_{\text{Hg}} (\mu\text{V}/^\circ\text{C}) = 2 - 23.33 \cdot 10^{-3} T.$$

Takeuchi and Nogachi [1966] ont étudié l'influence d'impuretés métalliques présentes dans le mercure sur la valeur de P_{Hg} . Des variations jusqu'à 25% sont observées pour des concentrations en impuretés de l'ordre de seulement quelques unités at.%. Les valeurs du pouvoir thermoélectrique relatif associé au couple Platine/Mercure désigné par la notation $P_{Pt/Hg}$, tirées de ces deux études, sont données ci-dessous pour informations.

Températures (°C)	$P_{Pt/Hg}$ ($\mu V/^{\circ}C$) $\pm 12.5\%$
-13	-0.21
7	0.02
27	0.141
47	0.244

Des mesures du pouvoir thermoélectrique relatif $P_{Pt/Hg}$ ont été tentées à l'aide de l'expérience MASCOT. L'impossibilité d'obtenir une reproductibilité satisfaisante sur les valeurs de $P_{Pt/Hg}$ justifie le protocole expérimental observé pour mesurer les potentiels électriques. La chaîne de traitement analogique des signaux $S_{AB}(m,n)$, possède une dizaine de voies en entrée. Sur chacune des voies, le gain d'amplification $A(m,n)$ est remarquablement stable dans le temps puisque l'enceinte entourant l'électronique est tempérée à la température T_e . La valeur moyenne de $A(m,n)$ mesurée sur ces voies est de 1950. Les écarts relatifs mesurés autour de cette valeur moyenne ne dépassent pas $\pm 5\%$ sur toutes les voies. En revanche, de même que pour les mesures de température, on observe une lente évolution de la valeur des offsets : $Offset(m,n)$. Ici, leur mesure simultanée avec celle du signal après amplification $S(m,n)$, devient cruciale puisque les ordres de grandeur de $Offset(m,n)$ et $S(m,n)$ (quelques mV) sont identiques. Le protocole expérimental suivant est donc suivi :

1. Mesures des signaux $S(m,n)$ entre deux points m et n choisis tels que $T_m = T_n$, la tension d'origine thermoélectrique $P_{Pt/Hg}^*(T_m - T_n)$, est donc identiquement nulle et $S(m,n)$ s'exprime comme la somme : $A(m,n) * [\Phi_m - \Phi_n]_{\text{thero}} + Offset(m,n)$.

2. Mesures de $S(m,n)$ après extinction du champ magnétique appliqué à l'écoulement thermogravitaire. Les signaux $S(m,n)$ sont donc simplement égaux aux offsets électroniques $Offset(m,n)$.

Les distributions de la différence de potentiels électriques $[\Phi_m - \Phi_n]_{\text{thero}}$ sont finalement obtenues par application de la relation suivante, forme modifiée de l'expression (II.3-2)

$$[\Phi_m - \Phi_n]_{\text{thero}} = \frac{S(m,n) - Offset(m,n)}{A(m,n)}$$

3.2. Sonde mobile mixte (SMM)

3.2.1. Description

Une sonde mobile mixte désignée par le sigle SMM, permet de réaliser des mesures de potentiel électrique et de température à l'intérieur du domaine fluide. La géométrie de ce montage est schématisée sur la figure 8. La SMM se déplace angulairement ($\alpha=0^\circ-180^\circ$) et axialement ($X=200-400\text{mm}$) à partir du front chaud dans la partie supérieure de la cavité cylindrique via un système de pilotage extérieur à la cellule.

Du point de vue instrumentation, quatre sondes mixtes thermocouple-potential électrique sont réparties sur un rayon. Une cinquième sonde mixte S_5 , localisée à l'extrémité de l'axe de la SMM, se confond avec le centre de la section de la cellule. Pour une position axiale déterminée, la température T_5 , et le potentiel électrique Φ_5 , captées par la sonde S_5 , ne varient donc pas par rotation angulaire de la SMM.

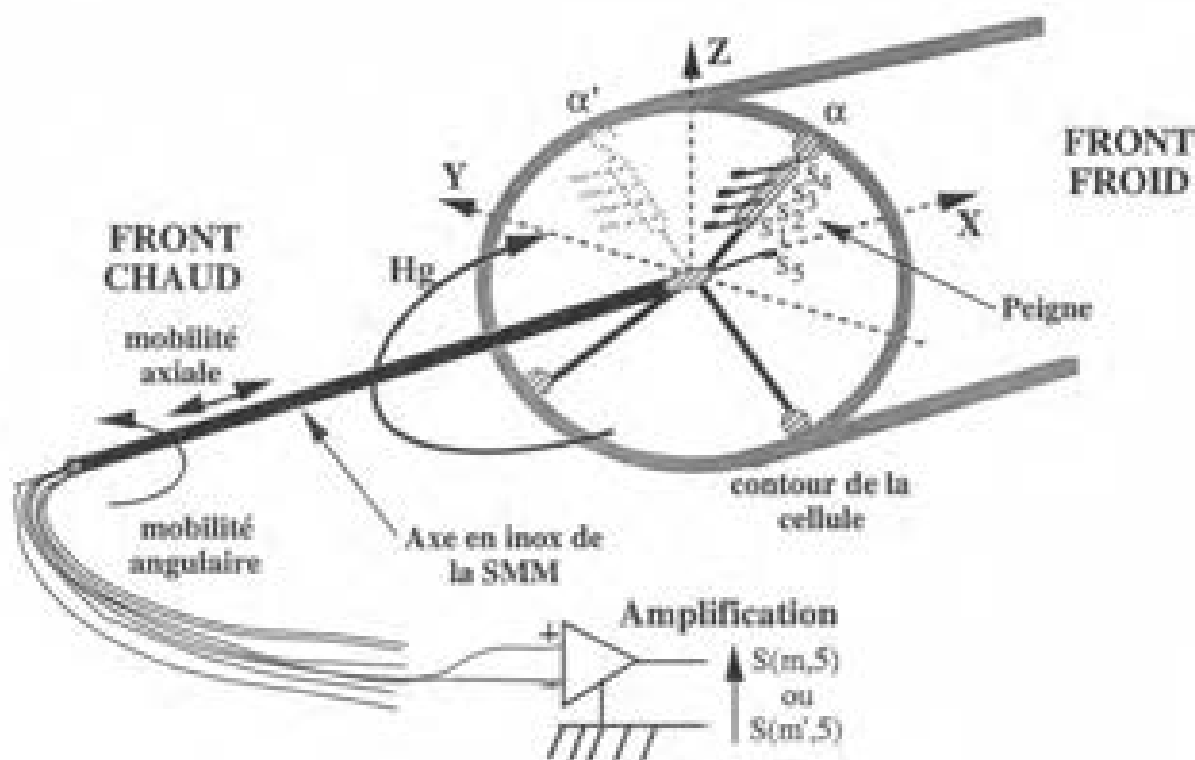


Figure 8. SMM : géométrie et mesures.

3.2.2. Principe des mesures

Le protocole expérimental mis en place pour les mesures de température par les sondes pariétales (cf. paragraphe 3.1.2.) est de nouveau repris pour la SMM. En revanche pour les mesures de potentiels électriques, une nouvelle difficulté se présente : la position des sondes semble indiquer que seules des différences de potentiels électriques sur un rayon sont *a priori* mesurables. En fait, cette difficulté apparente peut être contournée en mesurant les différences de potentiels électriques dans des sections localisées entre le centre ($X=200\text{mm}$) et le front chaud ($X=400\text{mm}$) de la cellule. Il convient alors de faire intervenir la sonde centrale S_3 avec la stratégie suivante. Considérons la figure 8. Une mesure différentielle du signal électrique $S(m,5)$, est réalisée entre les sondes S_m (S_m allant de S_1 à S_4) et S_3 , pour une position angulaire α donnée ($\alpha > 90^\circ$). Juste après cette mesure, pour une autre position angulaire de la SMM, $\alpha' = \alpha - 90^\circ$, dans la même section, le signal $S'(m',5)$ est également mesuré entre les mêmes sondes (en pointillé sur la figure 8.). D'après la relation (II.3-2), l'expression des signaux $S(m,5)$ et $S'(m',5)$ s'écrit :

$$S(m,5) = A(m,5) * \left\{ [\phi(m) - \phi(5)] + P_{\text{Platine}/\text{Hg}} * (T_m - T_3) \right\} + \text{Offset}(m,5) \quad (\text{II.4-1})$$

et

$$S'(m',5) = A(m',5) * \left\{ [\phi(m') - \phi(5)] + P_{\text{Platine}/\text{Hg}} * (T_{m'} - T_3) \right\} + \text{Offset}(m',5) \quad (\text{II.4-2})$$

Les gains $A(m',5)$ et $A(m,5)$ sont égaux puisque le câblage vers la chaîne de traitement analogique reste le même : m et m' ne se différencient pas par la sonde mais par la position angulaire. Si les mesures des deux signaux $S(m,5)$ et $S'(m',5)$ sont suffisamment rapprochées, les offsets électroniques $\text{Offset}(m,5)$ et $\text{Offset}(m',5)$ n'ont pas dérivé et sont également égaux. En conséquence, l'expression de la différence de potentiels électriques entre deux positions angulaires m (inclinaison α) et m' (inclinaison α') consécutivement occupées par une sonde S_m de la SMM, est finalement obtenue par l'expression (II.5-1) combinaison des expressions (II.4-1) et (II.4-2) :

$$\phi_{m'} - \phi_m = \frac{S(m',5) - S(m,5)}{A(m,5)} + P_{\text{Platine}/\text{Hg}} * (T_m - T_{m'}) \quad (\text{II.5-1})$$

En outre, si les deux positions angulaires α et α' sont symétriques l'une de l'autre par rapport au plan vertical longitudinal XZ, alors, lorsque le régime est stationnaire, les températures T_m et $T_{m'}$ sont égales. Cette affirmation anticipe l'analyse des distributions de température menée au chapitre III.

Dans ce cas, l'expression (II.5-1) se simplifie en l'expression (II.5-2) :

$$\phi_{m'} - \phi_m = \frac{S(m', 5) - S(m, 5)}{A(m, 5)} \quad (\text{II.5-2})$$

Cette dernière expression ne préjuge pas *a priori* de la connaissance du couple thermoélectrique P_{thermoHg} : elle a finalement été utilisée dans l'investigation expérimentale menée au moyen de la SMM.

3.2.3. Précautions expérimentales

La SMM : obstacle mécanique ?

La SMM peut-elle être considérée comme un obstacle mécanique ? Cette sonde est utilisée dans le cadre d'écoulements MHD à nombres de Hartmann importants : $Ha > 100$. Le chapitre I rappelle qu'alors, l'ordre de grandeur du champ de vitesse dans le coeur de l'écoulement est Gr_G / Ha^2 où Gr_G est le nombre de Grashoff bâti sur le gradient de température axial G , dans la zone centrale de l'écoulement. Pour les écoulements étudiés pendant cette thèse, Gr_G ne dépasse pas $10^5 - 10^6$. L'échelle de longueur pertinente à considérer est le diamètre de la SMM, autrement dit, quelques millimètres. Par suite, le nombre de Reynolds ne dépasse pas la valeur 10. Néanmoins, les sondes S_1 à S_4 sont placées en avant de la SMM de telle sorte que toute génération éventuelle de sillage est diffusée bien avant d'être détectée par lesdites sondes sous l'effet par exemple de la recirculation de l'écoulement. Ce problème ne se pose pas du tout pour la sonde S_5 positionnée en aval de la SMM : cette sonde ne remplit qu'un rôle de référence pour les mesures de potentiel électrique.

La SMM : obstacle électrique ?

Les perturbations électriques les plus importantes sont potentiellement créées par l'axe en inox et le peigne électriquement isolé de la SMM (figure 8). Le peigne représente donc un premier obstacle électrique pour l'écoulement thermogravitaire MHD étudié. La SMM est pilotée à partir du front chaud de la cellule de telle sorte que les sondes mixtes font face au champ de vitesse principalement axial sur la majeure partie de la cellule où les mesures sont réalisées. Par suite, les sondes, en retrait amont de 1cm à partir du peigne, peuvent ne pas subir la perturbation électrique générée par la présence de leur support. Vérifions cette assertion. Moreau [1990] présente le calcul de l'écoulement MHD 3D autour d'un obstacle électriquement isolé. Comme pour le cas du peigne de la SMM (inclinaisons des mesures : $\alpha = 45^\circ, 135^\circ$), la section de l'obstacle est à la fois inclinée par rapport au champ de vitesse et au champ magnétique B_0 . Dans ce cas, une zone entourée par des couches parallèles se formant en amont et en aval de l'obstacle se distingue de l'écoulement extérieur. A l'intérieur de cette zone et des couches parallèles, l'écoulement est considérablement modifié lorsque $Ha >> 1$. L'épaisseur des couches parallèles δ_H est l'ordre de grandeur de leur extension. Si δ_H reste largement inférieure

à 1cm, les mesures réalisées avec les sondes S_1 à S_4 ne sont pas modifiées par des perturbations du circuit électrique dues à la présence du peigne dans l'écoulement MHD. L'épaisseur des couches parallèles δ_H s'exprime comme $(r / ha^{1/2})$ où r et ha sont l'échelle de longueur et le nombre de Hartmann calculés pour le peigne. Si le nombre de Hartmann Ha , est de l'ordre de 100, les ordres de grandeurs suivants peuvent être calculés :

$$r = 1 \text{ mm} \quad \text{et} \quad ha = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}} B_0 r = 5,$$

$$\delta_H = 0,4 \text{ mm}.$$

En conséquence, δ_H étant très petit devant 1cm, aucune perturbation électrique engendrée par la présence du peigne dans l'écoulement ne peut perturber les mesures.

L'axe de la SMM peut représenter une autre source d'inquiétude. En fait, les lignes de densités de courant électriques se referment dans le coeur MHD de l'écoulement en cercles cocentriques autour de l'axe de la cellule X, ou de l'axe de la SMM. Seule, une faible part de la densité de courant, à l'ordre $O(Ra_G)$ se referme dans des plans longitudinaux horizontaux (Cowley [1994]). Finalement, la présence de cet axe dans une zone où le potentiel électrique est très petit, n'engendre pas de perturbation détectable par les mesures effectuées avec la SMM (Chapitre III).

Présence de la SMM dans le mercure : création de phénomènes thermoélectriques ?

L'axe principal de la SMM est conçu en inox et s'aligne avec le gradient de température axial. Des phénomènes thermoélectriques à l'interface inox-mercure sont potentiellement générés dans les zones où ce gradient de température axial est important. Au voisinage des fronts où les couches limites thermiques se développent, son ordre de grandeur peut atteindre 100 K/m. L'utilisation de la SMM se limite à valider la symétrie du potentiel électrique par rapport au plan vertical longitudinal XZ de la cellule. Si les résistances de contact entre le mercure et l'inox de l'axe sont négligeables, la distribution des densités de courant thermoélectrique est axisymétrique autour de l'axe de la SMM. Cette explication permet de comprendre pourquoi les perturbations thermoélectriques (localisées au voisinage des fronts) ne sont pas détectées par les mesures réalisées avec la SMM. En revanche, les potentiels électriques mesurés avec les sondes mixtes pariétales sont modifiés dans la région où se trouve la SMM. Une reproductibilité satisfaisante de ces mesures n'est alors obtenue qu'avec la SMM plaquée sur le front chaud : les distributions pariétales du potentiel électrique présentées au chapitre III ont toujours été mesurées sur la moitié de la cellule ($X=0-200\text{mm}$) où la SMM était absente. Par inversedement de la circulation de Hadley (inversedement des températures T_1 et T_2), ces distributions pariétales peuvent être obtenues sur toute la longueur L de la partie supérieure de la cellule.

3.3. Mesure globale des transferts de chaleur

L'écoulement thermogravitaire MHD présent dans l'expérience MASCOT est également étudié expérimentalement par une mesure globale des transferts de chaleur. Lorsque le champ magnétique imposé B_0 est maximum, l'écoulement est suffisamment freiné (chapitre III suivant) pour que le régime puisse être considéré purement conductif. Dans ce cas, les flux de chaleur conductifs Φ_{Cu} et Φ_{Hg}^0 , passant respectivement à travers le cache adiabatique en cuivre et le domaine fluide, donnent lieu aux puissances thermiques Φ_{Cu} et Φ_{Hg}^0 . Rappelons qu'un couvercle cylindrique en cuivre, dénommé cache adiabatique, entoure entièrement la cellule afin d'imposer correctement la condition aux limites de Neuman pour le flux normal de température à la paroi longitudinale de la cellule. Lorsque l'écoulement thermogravitaire s'installe dans la cellule pour une valeur modérée B_0 , du champ magnétique alors le flux de chaleur total Φ_{Hg} , transporté par le mercure, est la somme d'un flux de chaleur conductif et d'un flux de chaleur convectif. La puissance thermique totale, Φ_{tot} , transmise du front chaud vers le front froid suit la loi :

$$\Phi_{tot} = \Phi_{Hg} + \Phi_{Cu} \quad (II.6-1)$$

et provoque, entre l'entrée et la sortie des flasques localisés aux extrémités chaude et froide, respectivement, une diminution ou une élévation de température de l'eau de régulation. Si le débit de cette eau de régulation est suffisamment abaissé, alors les variations de température δT , induites par la puissance thermique Φ_{tot} , sont mesurables. Le schéma esquissé sur la figure 9 illustre ce raisonnement.

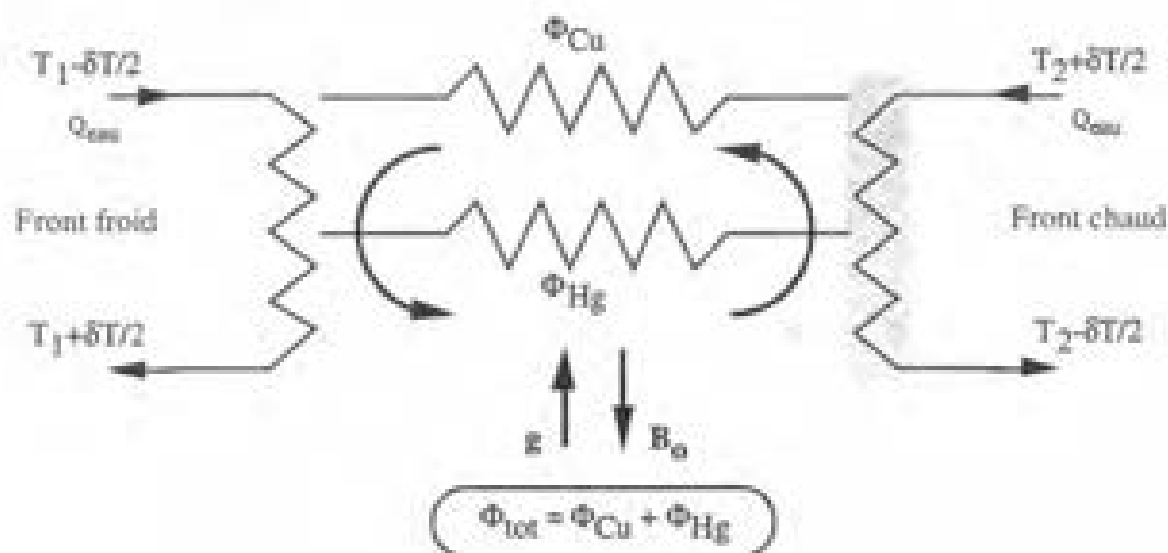


Figure 9. Schéma des transferts de chaleur

3.3.1. Mesure différentielle

La méthode adoptée pour mesurer avec une précision de $\pm 1\%$ la faible différence de température δT , de quelques centièmes de degrés, est celle du thermocouple différentiel. Le couple thermoelectrique impliqué est le couple chromel-constantan (type E) (figure 10).

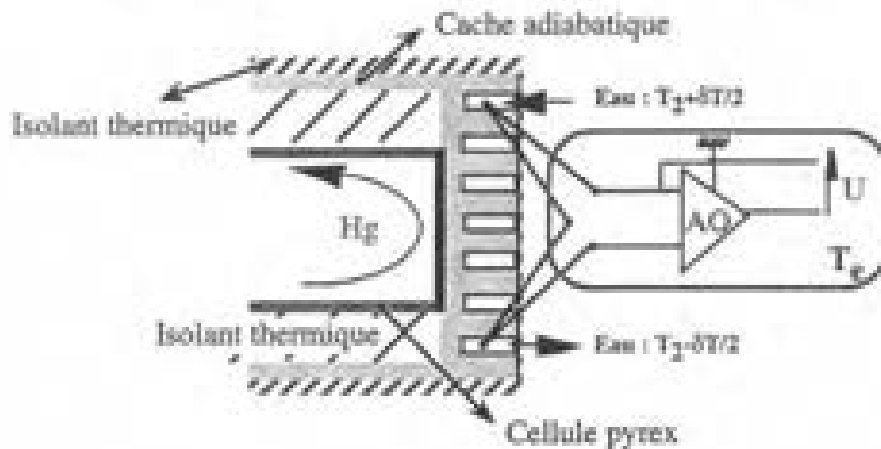


Figure 10. Mesure différentielle de δT aux extrémités
(front chaud sur la figure)

Dans le contexte spécifique de cette mesure globale des transferts de chaleur aux extrémités, le circuit de régulation d'eau subit quelques modifications. La boucle fermée pour la régulation de la température T_2 au front chaud est supprimée. La boucle ouverte pour la régulation des températures T_e , T_0 et T_1 est prolongée jusqu'au front chaud. Deux échangeurs de chaleur asservis par des télécommandes PID sont intercalés entre les deux fronts et maintiennent l'écart de température $T_2 - T_1$ à une précision de $\pm 1/100\text{K}$. En conséquence, le débit d'eau Q_{eau} circulant à l'intérieur des deux fronts est exactement le même. D'autre part, le cache adiabatique en cuivre est enveloppé d'une couche épaisse d'isolant thermique. Les pertes vers l'ambiant sont donc considérées négligeables. Le problème thermique équivalent est donc *a priori* symétrique : comme illustré sur la figure 9, la même valeur de δT est mesurée aux deux extrémités. Par suite, la puissance thermique Φ_{tot} s'exprime en fonction de la différence de température δT suivant la loi :

$$\Phi_{\text{tot}} = Q_{\text{eau}} \cdot C_{p_{\text{eau}}} \cdot \delta T$$

La chaleur massique à pression constante de l'eau $C_{p_{\text{eau}}}$, est prise égale à $4180 \text{ J} / (\text{kg.K})$. Le débit massique Q_{eau} est mesuré à la sortie du front chaud avec une précision de $\pm 1\%$ à l'aide d'une balance et d'un chronomètre.

3.3.2. Nombre de Nusselt Nu_1

Afin d'évaluer quantitativement les transferts de chaleur, le nombre de Nusselt Nu_1 est défini comme le rapport de la puissance thermique Φ_{Hg} à la puissance thermique de référence Φ_{Hg}^0 estimée dans des conditions de conduction approchée ($Bo = 0.6135T$ sur l'expérience) :

$$Nu_1 = \Phi_{Hg} / \Phi_{Hg}^0 \quad (II.6-2)$$

Cette définition est en accord avec le sens commun donné au nombre de Nusselt. En conduction approchée, la puissance thermique totale Φ_{tot}^0 est également mesurée ; elle s'exprime sous la forme :

$$\Phi_{tot}^0 = \Phi_{Cst} + \Phi_{Hg}^0 \quad (II.6-3)$$

A partir des relations (II.6-1) à (II.6-3), l'expression du nombre de Nusselt prend la forme :

$$Nu_1 = \{[\Phi_{tot} - \Phi_{tot}^0] / \Phi_{Hg}^0\} + 1.$$

Les grandeurs Φ_{tot} et Φ_{tot}^0 sont directement mesurées et seul le flux de conduction Φ_{Hg}^0 est à calculer avec l'expression :

$$\Phi_{Hg}^0 = \lambda [(T_2 - T_1) / L] \pi R_c^2.$$

Finalement, les distributions du nombre de Nusselt Nu_1 présentées au chapitre III sont obtenues avec la relation finale (II.7) suivante :

$$Nu_1 = \frac{L * (\Phi_{tot} - \Phi_{tot}^0)}{\lambda * (T_2 - T_1) * \pi R_c^2} + 1, \quad (II.7)$$

où la valeur de la conductivité thermique du mercure λ , est interpolée à la température $(T_2 + T_1)/2$ à l'aide des caractéristiques physiques du mercure connues aux températures 0°C et 50°C et exposées dans le tableau de ce chapitre.

3.4. Acquisition des potentiels électriques

Les mesures de potentiel électrique sont plus délicates que les mesures de températures. Un blindage soigné des fils émanant des capteurs de potentiel électrique est incontournable. Ce blindage, le cache adiabatique en cuivre enveloppant la cellule et les capteurs, l'enceinte électronique, les masses des amplificateurs analogiques ainsi que les masses des boîtiers multiplexeurs sur la centrale d'acquisition sont tous reliés à une terre spécialement aménagée pour l'expérience. Ces précautions, essentielles, permettent la mesure de potentiel électrique dont l'ordre de grandeur est de 0.5 à 5 μV . En outre, les expériences sont menées de nuit par pilotage de l'expérience à partir d'un micro-ordinateur. La centrale d'acquisition HP3852A utilisée pour la réalisation de nos expériences ainsi que le générateur de courant continu alimentant l'électro-aimant sont commandés simultanément par ce micro-ordinateur via une carte entrée-sortie. Ce pilotage est également essentiel pour l'étude de la transition vers la turbulence (cf. chapitre V).

L'amplification de la chaîne de traitement analogique se caractérise par un gain élevé et stable. A la sortie, le niveau des signaux analogiques à mesurer est au plus de quelques mV. L'écoulement étudié est stationnaire, par suite, la rapidité de l'acquisition est reléguée à un second plan au profit de la précision sur la mesure. Notre stratégie consiste donc à pratiquer une mesure intégrale avec un convertisseur analogique-digital HP44701A. L'intérêt de ce convertisseur réside dans sa capacité à effectuer une mesure sur une durée de 320 millisecondes correspondant à 16 périodes alternatives $1 / (50 \text{ Hz})$ du réseau. Le résultat obtenu est une parfaite absence de bruit analogique sur les signaux après digitalisation (12 bits) et une précision de $\pm (0.02\% + 6\mu\text{V})$ sur l'acquisition et la numérisation des signaux amplifiés.

4. Conclusion

Dans ce chapitre, la conception de l'expérience MASCOT est justifiée sur la base d'une argumentation physique fondée sur l'importance du circuit électrique dans l'écoulement thermogravitaire MHD à étudier expérimentalement. Cette importance nous a conduit à porter une grande attention à la coaxialité de la cellule et à l'uniformité du champ magnétique imposé. L'imposition de conditions aux limites thermiques *ad hoc* (Neuman ou Dirichlet à la paroi longitudinale ou aux extrémités) requiert un équipement spécifique également présenté dans ce chapitre.

Des explications sur la manière dont sont conduites les mesures locales de température et de potentiel électrique sont apportées. Nous portons notamment l'attention du lecteur sur la délicatesse des mesures de potentiel électrique d'origine MHD. Leur ordre de grandeur n'est que de quelques μV pour cet écoulement thermogravitaire auquel s'ajoutent une pollution thermoélectrique du signal électrique également du même ordre de grandeur. La stratégie développée pour s'affranchir de la contribution thermoélectrique au signal électrique est présentée.

L'introduction de la sonde mobile mixte à l'intérieur du volume de mercure est étudiée. Nous montrons que la seule perturbation notable de l'écoulement engendrée par la présence de cet obstacle est d'ordre thermoélectrique. Nous tenons compte de ce défaut de la manière suivante : les différences de potentiels électriques sont systématiquement mesurées entre deux points symétriques l'un de l'autre par rapport au plan vertical longitudinal de la cellule.

Une méthode pour effectuer une mesure globale et directe des transferts de chaleur dans l'expérience est proposée. Elle consiste à estimer le nombre de Nusselt Nu_1 , en mesurant l'élévation ou la diminution de la température dans le circuit d'eau de régulation des températures T_1 et T_2 entre l'entrée et la sortie des flasques de cuivre localisés aux deux extrémités de la cellule.

Finalement, des précisions sur le pilotage de l'expérience et le système d'acquisition, spécifiquement développés pour une investigation expérimentale de l'écoulement stationnaire, sont apportées. Mentionnons que l'instrumentation et les outils de traitement de signaux développés afin d'étudier tout particulièrement la transition vers la turbulence de l'écoulement thermogravitaire MHD au sein de l'expérience MASCOT ne sont pas présentés dans ce chapitre mais dans le chapitre spécifique à cette étude en instationnaire (chapitre V). Cette démarche assure une lisibilité plus claire de ce mémoire.

CHAPITRE III

Investigation expérimentale d'un écoulement thermogravitaire stationnaire MHD dans une configuration G-H élancée.

L'étude expérimentale de l'écoulement thermogravitaire MHD stationnaire au sein de la cellule cylindrique horizontalement élançée de l'expérience MASCOT (chapitre II) est présentée dans ce chapitre. A l'aide de mesures locales de température et de potentiel électrique, les lois d'échelle portant sur la vitesse et la température sont obtenues. L'interprétation de nos résultats expérimentaux repose sur les précisions théoriques apportées au chapitre I. La transition d'un régime thermique stratifié à un régime de coeur est mise en évidence quand le nombre de Rayleigh modifié Ra_G , diminue. En prolongeant le développement asymptotique de Cowley [1994] jusqu'à l'ordre $O(Ra_G^{-3})$, nous montrons que le régime de coeur (régime thermique II) est à peine atteint sur l'expérience MASCOT lorsque le nombre de Hartmann est égal à 320 (valeur maximale disponible). Les distributions pariétales de température autour de cercles localisés au voisinage des fronts de la cellule sont analysées. Lors de la transition entre les deux régimes thermiques, ces distributions présentent une déformation marquée, liée à la stratification de coeur, qui s'inverse par augmentation de l'épaisseur δ_i des couches limites thermiques le long des extrémités ($\delta_i \sim (PrRa)^{-1/4}$). Cette nouvelle déformation, cohérente avec la distribution de potentiel électrique mesurée expérimentalement, disparaît lorsque le régime de coeur apparaît. Finalement, les conclusions formulées à l'issue de cette étude confirment la pertinence du nombre de Rayleigh modifié Ra_G , pour décrire la transition du régime de couches limites thermiques vers le régime thermique de coeur.

1. Introduction

Les études expérimentales consacrées à l'étude des écoulements thermogravitaires MHD sont rares. Pour de tels écoulements en configuration G-H, seule l'investigation expérimentale menée par Okada and Ozoe [1992] sur la base d'une configuration G-H cubique remplie de gallium est actuellement disponible dans la littérature. Cette investigation reste cependant limitée par son caractère global puisqu'elle se limite à une analyse des transferts de chaleur, caractérisée par l'évolution en fonction du nombre de Hartmann d'un nombre adimensionnel A , défini par la relation :

$$A = \frac{[Nu - 1]}{[Nu_{(Ha=0)} - 1]}$$

où Nu représente le nombre de Nusselt. Classiquement défini comme le rapport entre le flux de chaleur total (flux de convection superposé au flux de conduction) et le flux de conduction entre les deux extrémités chauffées de la configuration -à $\Delta T/L$, son interprétation est claire. En revanche, l'interprétation physique du nombre A nous semble plus délicate. En effet, l'adimensionnement conduisant à l'écriture de A est basé sur le nombre de Nusselt $Nu_{(Ha=0)}$, associé aux transferts de chaleur à travers la cavité lorsque le champ magnétique imposé est nul :

l'estimation de ce nombre de Nusselt particulier est *a priori* non triviale. Bien que la configuration cubique choisie par Okada and Ozoe [1992] soit éloignée de la réalité d'une croissance cristalline, pour un entrefer de l'électroaimant et un gradient de température horizontal imposés, cette géométrie offre la possibilité d'orienter le champ magnétique B_0 dans les trois directions principales de l'espace. L'alignement du champ magnétique suivant la pesanteur se révèle être la situation la plus efficace pour freiner l'écoulement. En outre, l'étude menée par Okada and Ozoe [1992] aboutit à la conclusion que, si le régime est faiblement convectif, l'évolution du paramètre Λ en fonction du nombre de Hartmann Ha est mieux interpolée par le groupement adimensionnel $Ha/Gr_{\Delta T}^{1/3}$ que par le nombre de Lykoudis $Ly = Ha^2/Gr_{\Delta T}^{1/2}$. Bien que la pertinence physique du groupement $Ha/Gr_{\Delta T}^{1/3}$ nous paraisse obscure, ce résultat n'est pas trop étonnant. En effet, le nombre de Lykoudis (Lykoudis [1962]) est déterminé dans le cadre d'un écoulement thermogravitaire, sous champ magnétique transverse, créé en présence d'une plaque plane chaude verticale et infinie, plongée dans un bain de métal liquide. Détaillons sa construction. A partir de l'équilibre entre inertie et force de flottabilité, un ordre de grandeur du champ de vitesse est évalué. Puis le nombre de Lykoudis est écrit comme le rapport du temps t_b au temps t_p , respectivement définis comme le temps d'amortissement associé à la force de freinage électromagnétique (point de vue 2D) et le temps caractéristique de mise en mouvement d'une parcelle fluide sous l'effet de la seule force de flottabilité. En conséquence, le nombre de Lykoudis ne décrit de manière pertinente le problème physique étudié que si l'inertie est un des phénomènes physiques prépondérants. Pour le cas des configurations G-H faiblement élançées verticalement, l'inertie ne joue au plus qu'un rôle intermédiaire.

Nous présentons dans ce chapitre une investigation expérimentale à la fois locale et globale de l'écoulement thermogravitaire MHD dans la cellule cylindrique horizontalement élançée de l'expérience MASCOT. Le caractère local de l'investigation est lié à la mesure de distributions pariétales de température et de potentiel électrique qui délivrent des informations indispensables à une compréhension plus fine de l'écoulement. L'aspect global est associé à la mesure directe du nombre de Nusselt Nu , référencé au flux de conduction $-\lambda \Delta T/L$ où λ , ΔT et L désignent, respectivement, la conductivité thermique du mercure, l'écart de température imposé $T_2 - T_1$, et la longueur de la cellule. L'interprétation de nos résultats est menée à la lumière des aspects théoriques exposés au chapitre I. Toutes nos conclusions convergent vers l'importance du nombre de Rayleigh modifié Ra_G dont l'expression $Ra_G = Pr Gr_G / Ha^2$ repose sur la condition *sine qua non* que les couches de Hartmann soient électriquement inactives. Pour une lecture plus aisée de ce chapitre, nous rappelons que les régimes thermiques I, II et III désignent, respectivement, le cas d'un régime de conduction non perturbé par la circulation de Hadley, le cas d'un régime de coeur caractérisé par un régime établi sur la majeure partie de la cavité, et enfin, le cas d'un régime de couches limites thermiques comportant un coeur stratifié et quasi-stagnant, entouré de jets de parois concentrés dans les couches limites thermiques qui se développent le long des parois de la cavité.

2. Propriétés générales de l'écoulement

Dans cette partie, les propriétés les plus notables de l'écoulement stationnaire de convection naturelle MHD au sein de la cellule MASCOT sont présentées. Les forces de flottabilité verticales ascendante ou descendante au voisinage, respectivement, du front chaud ou froid, sont responsables en partie de gradients de pression verticaux et de signes opposés dans ces régions. Des gradients de pression orientés suivant l'axe de la cellule sont ainsi engendrés : des particules fluides " chaudes " se déplacent du front chaud vers le front froid au voisinage des génératrices supérieures du cylindre, α variant de 0° à 180° , et des particules fluides " froides " se déplacent du front froid vers le front chaud au voisinage des génératrices inférieures du cylindre, α variant de 0° à 180° , (figure 1.). Ce scénario heuristique écarte bien entendu des phénomènes tels que le transport de la chaleur par convection ainsi que les autres forces en présence, de nature différente de la flottabilité, telles que la force de Laplace. Si X , désigne l'abscisse, comptée à partir du front froid de la cellule, les notations suivantes sont adoptées :

1. $T_{X=200}(\alpha)$, distribution pariétale de température autour du cercle (central) localisé à l'abscisse $X = 200$ mm,
2. $T_{\alpha=45^\circ}(X)$, distribution pariétale de température le long de la génératrice inclinée à $\alpha = 45^\circ$, par rapport au plan horizontal XY .
3. $\Delta\Phi(X)$, distribution pariétale du potentiel électrique Φ , le long de la partie supérieure de la cellule et définie par la relation : $\Delta\Phi(X) = \Phi(\alpha=45^\circ) - \Phi(\alpha=135^\circ)$.

Des mesures de potentiels électriques réalisées à l'aide de la sonde mobile mixte (SMM) selon le protocole expérimental présenté au chapitre II, permettent de mettre en évidence la symétrie de l'écoulement laminaire par rapport au plan vertical longitudinal XZ , pour deux nombres de Hartmann différents : $Ha=53.3$ et $Ha=107$. Cette symétrie particulière permet de simplifier la relation précédente sous la forme :

$$\Delta\Phi(X) = 2 \cdot \Phi(\alpha=45^\circ) = -2 \cdot \Phi(\alpha=135^\circ).$$

Par ailleurs, les techniques ainsi que les procédés de mesure mis en oeuvre pour obtenir les distributions pariétales de température ont également été présentés au chapitre II. Rappelons simplement que la plus grande concentration des mesures de température dans la zone de recirculation voisine du front froid, est due à la présence de 6 demi-cercles de thermocouples dans cette région. La symétrie centrale caractéristique de l'écoulement permet d'établir que les propriétés de l'écoulement mises en évidence dans les régions $\{X < 200, \alpha = 0^\circ - 90^\circ\}$ et $\{X < 200, \alpha = 90^\circ - 180^\circ\}$ sont aussi observées, respectivement, dans les régions $\{X > 200, \alpha = 180^\circ - 270^\circ\}$ et $\{X > 200, \alpha = 270^\circ - 360^\circ\}$.

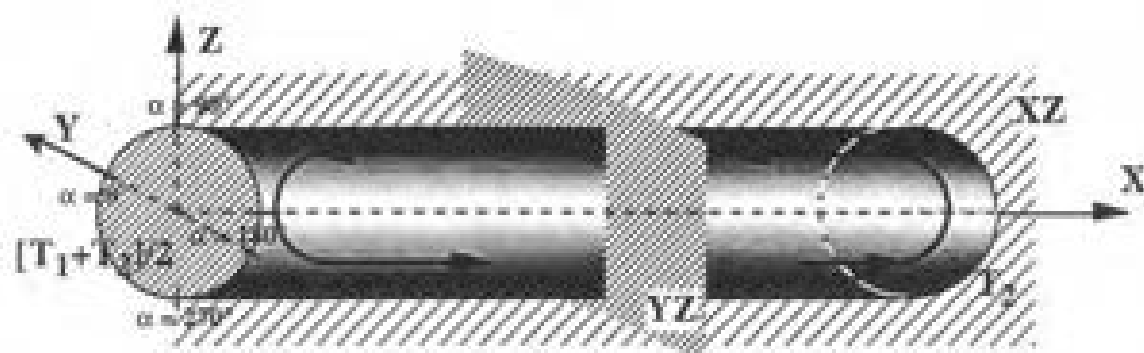


Figure 1. Schéma de la configuration expérimentale étudiée.

2.1. Distributions pariétales de température le long du cylindre

Les distributions pariétales de température, moyennées dans le temps, $T_{\alpha=0^\circ}(X)$ et $T_{\alpha=45^\circ}(X)$, représentées sur les figures 2a et 2b pour les écarts de température $\Delta T=18\text{K}$ ou $\Delta T=14.7\text{K}$, sont référencées, respectivement, par rapport à la température du front froid T_1 ou par rapport à la température de l'enceinte aux soudures froides T_0 (chapitre II). Pour les deux génératrices impliquées, d'inclinaisons différentes $\alpha=0^\circ$ et $\alpha=45^\circ$, il est possible de définir sur la région centrale du cylindre, un gradient de température axial uniforme G très faiblement dépendant de l'inclinaison de la génératrice (figure 4a). Cette région d'uniformité de G s'étale sur une distance de plus de 10 fois le rayon de la cellule et s'identifie au cœur. Lorsque le champ magnétique est nul (nombre de Hartmann $Ha = 0$), la valeur du gradient de température axial G est d'autant plus faible que l'écart de température entre les deux extrémités est important : cette propriété est typique d'un régime de couches limites (régime thermique III). Un tel régime peut présenter, si le nombre de Grashoff $Gr_{\Delta T}$ est suffisamment important, un gradient axial de température G nul, voire négatif, dans le cœur stratifié (Kalili *et al* [1994]). Pour un champ magnétique non nul, l'intensité de G dépend fortement du nombre de Hartmann (figure 3). Dès que ce dernier nombre est supérieur à 200, quel que soit le nombre de Grashoff $Gr_{\Delta T}$, le profil de température sur les génératrices devient approximativement linéaire. Dans le même temps, G tend vers sa valeur asymptotique G_0 associée à un régime parfaitement conducteur : $G_0=\Delta T/L$. Finalement, le rapport G/G_0 se révèle être un bon indicateur du niveau de convection.

2.1.1. Définition de l'écart de température $\theta(X, Y, Z)$.

Nous définissons la fonction $\theta(X, Y, Z)$, comme l'écart de température par rapport au profil linéaire de température observé sur une génératrice horizontale dans le cœur. Par suite, la température réelle dans la cellule s'écrit :

$$T = T_1 + \Delta_s T_1 + G \cdot X + \theta(X, Y, Z).$$

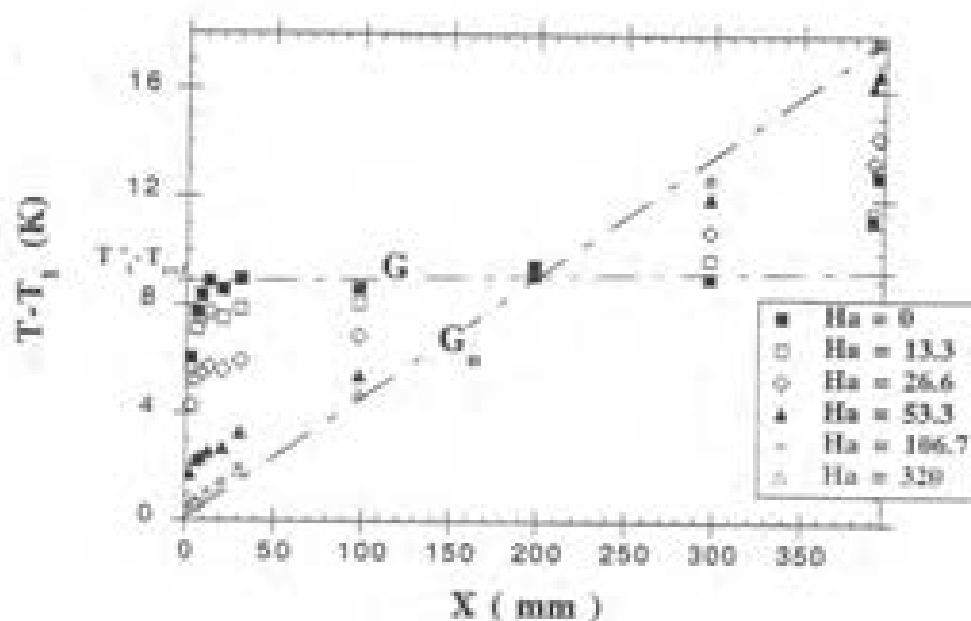


Figure 2a. Distribution de température le long de la génératrice inclinée à 0° en fonction du nombre de Hartmann Ha ($\Delta T = T_2 - T_1 = 18\text{K}$)

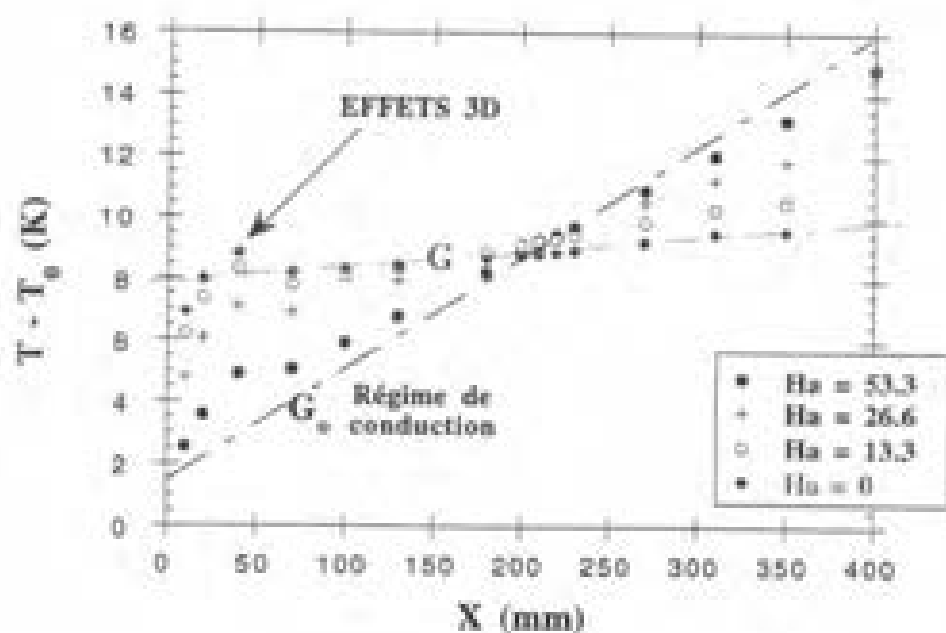


Figure 2b. Distribution de température le long de la génératrice inclinée à 45° en fonction du nombre de Hartmann Ha ($\Delta T = T_2 - T_1 = 14.7\text{K}$)

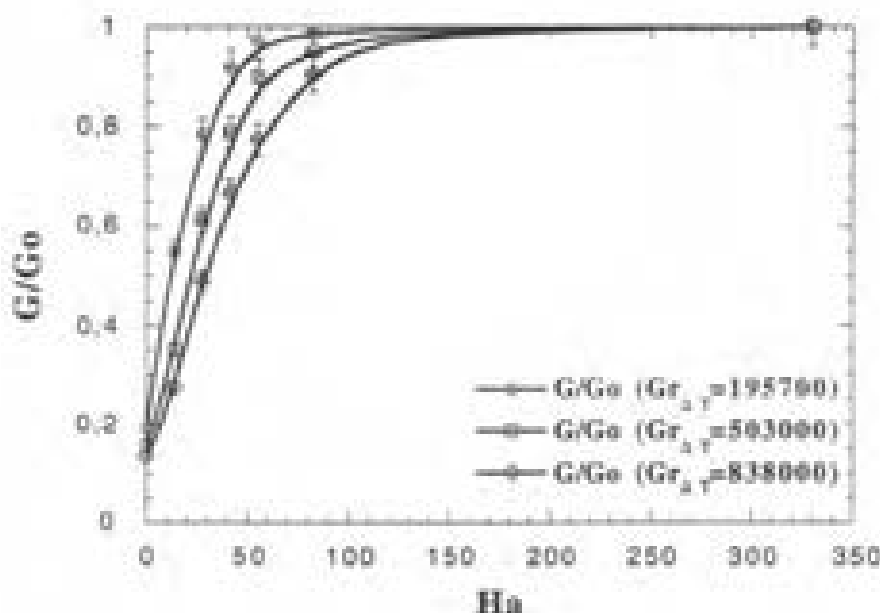


Figure 3. Rapport du gradient de température axial G à sa valeur limite G_0 , associée à un régime de conduction.

La notation $\Delta_s T_1$ désigne le saut de température au front froid, sur les génératrices horizontales ($\alpha=0^\circ, 180^\circ$). Ce saut de température est défini comme la différence entre la température virtuelle T_1 et la température T_f du front froid : la température T_1 s'obtient en prolongeant par la pensée la distribution linéaire de cœur G^*X jusqu'au front froid (figures 2a et 4b). Dans le cœur, l'écart de température $\theta(X, Y, Z)$ est de même que θ_1 (Cowley [1994], chapitre I), une fonction impaire de la coordonnée verticale Z et conduit par conséquent à une distribution anti-symétrique. En revanche, dans la zone hors-cœur où l'écoulement recircule, cette imparité est brisée ; il ne reste que la seule symétrie centrale :

$$\theta(-X, -Y, -Z) = -\theta(X, Y, Z),$$

toujours valable sur l'ensemble de la cellule si l'écoulement est laminaire. En conséquence, pour les régimes convectifs où le saut de température $\Delta_s T_1$ est nettement identifiable (nombre de Rayleigh suffisamment important), on peut déduire des distributions expérimentales de température $T_{\alpha=90^\circ}(X)$, $T_{\alpha=135^\circ}(X)$, $T_{\alpha=180^\circ}(X)$, $T_{\alpha=225^\circ}(X)$ et $T_{\alpha=270^\circ}(X)$ représentées sur la figure 4a, l'allure de la distribution de température dans le plan vertical longitudinal XZ de la cellule (haut de la figure 4b). D'après les propriétés de symétrie, les courbes isovaleurs de la température $\theta(X, Y, Z)$ adoptent dans ce plan la géométrie schématisée en bas de la figure 4b.

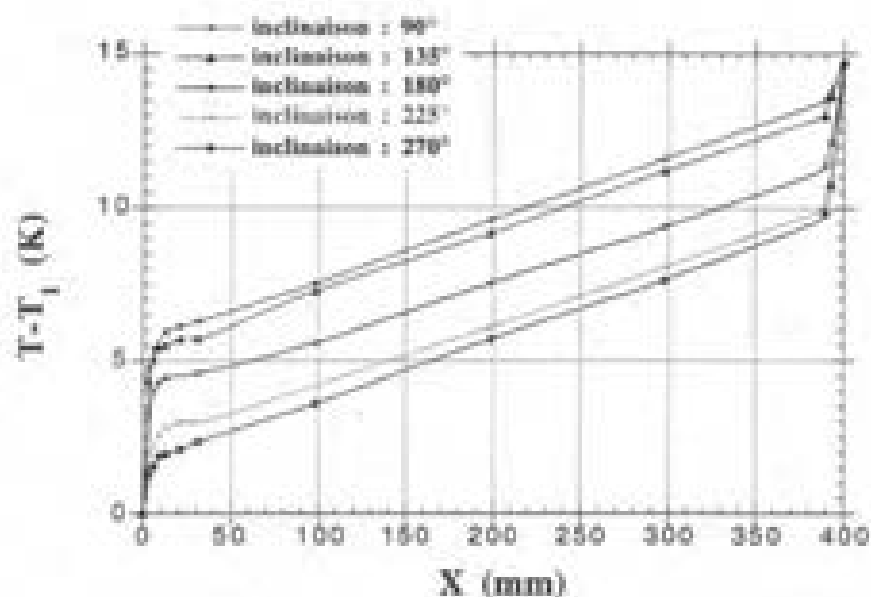


Figure 4a. Distributions de température sur cinq génératrices inclinées entre 90° et 270° ($\Delta T = 14.7$ K et $Ha = 26.6$).

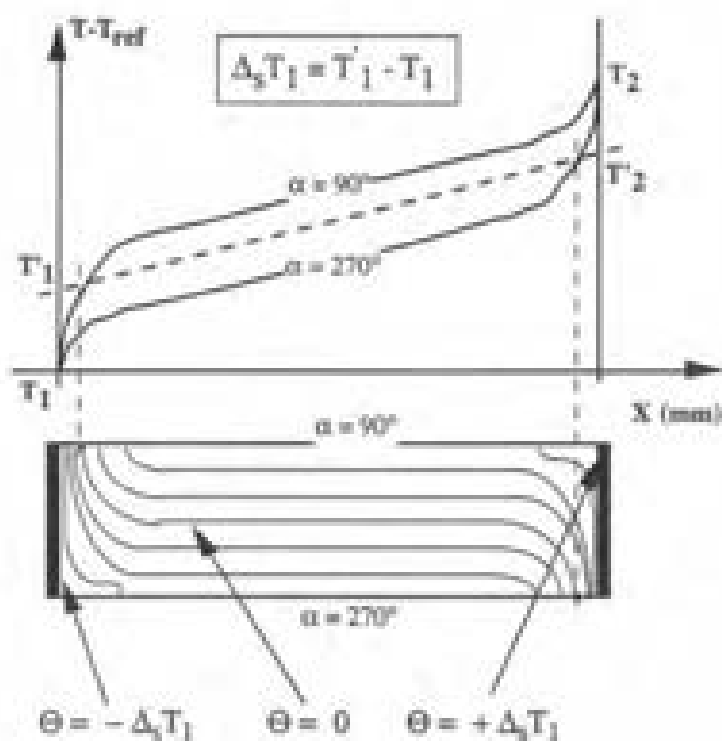


Figure 4b. Profils typiques de la température dans le plan XZ de la cellule (haut de la figure), et carte dans le plan XZ des courbes isovaleurs de l'écart de température $\theta(X, Y, Z)$ (bas de la figure).

Par suite, l'uniformité du gradient axial de température G n'est vraie que dans le cœur de l'écoulement. Dans la zone hors-cœur, la distribution de l'écart $\theta(X, Y, Z)$ conduit à la présence de gradients de température axiaux $\partial\theta/\partial X$, supplémentaires. En particulier, dans les zones hors-cœur froide ou chaude, ces gradients axiaux supplémentaires sont majoritairement positifs, et plus marqués dans les parties supérieure ou inférieure de la cellule. Cette remarque alimentera l'analyse des ordres de grandeur menée dans la partie 3 de ce chapitre (paragraphe 3.3.3.).

2.1.2. Effets tridimensionnels dans la zone hors-cœur

Un examen attentif de la figure 2b révèle la présence locale d'un *extremum* de température (indiqué par une flèche) sur la génératrice inclinée à 45° et distant d'environ un diamètre du front froid. Ce phénomène n'est pas observé sur la génératrice horizontale inclinée à 0° (figure 2a). Ce phénomène remarquable peut être interprété comme la trace d'un écoulement recirculant **tridimensionnel** dans la région hors-cœur. Considérons deux particules fluides se déplaçant symétriquement de part et d'autre du plan vertical longitudinal XZ , du front chaud vers le front froid au voisinage de la génératrice supérieure du cylindre ($\alpha = 90^\circ$). Dans chacun des quatre quadrants d'une section localisée à l'intérieur de la zone de recirculation de l'écoulement, la composante transverse de la vitesse, impaire avec Y , est non nulle. Sous l'effet de ce champ de vitesse tridimensionnel les particules fluides chaudes sont amenées à suivre deux trajectoires divergentes, toujours symétriques par rapport au plan XZ , provoquant sur les génératrices inclinées une augmentation locale de la température (figure 5). Un écoulement tridimensionnel de ce type a déjà été mis en évidence à partir de simulations numériques menées à l'intérieur d'un cylindre en présence d'un champ magnétique (Davooust *et al* [1995] et Ben Hadid *et al* [1996]) ou non (figure 5 d'après Bontoux *et al* [1986]).

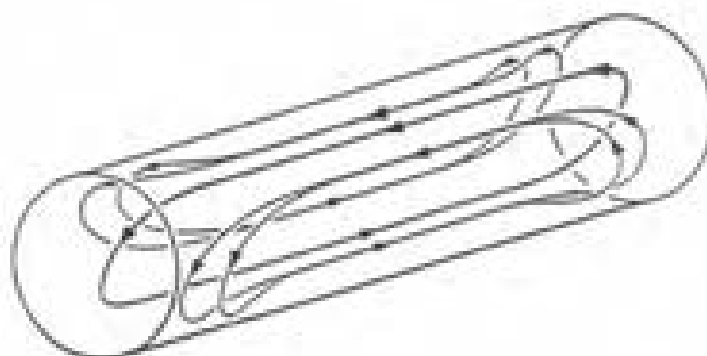


Figure 5. Recirculation tridimensionnelle de l'écoulement au voisinage des extrémités pour le cas $Ha = 0$ (d'après Bontoux *et al* [1986]).

2.2. Distribution de température autour du cercle central

Nous représentons sur la figure 6a la distribution de température pariétale autour du cercle central : $T_{X=300}(\alpha)$. Cette distribution, moyennée dans le temps, est interpolée en première approximation, par une sinusoïde. L'évolution en fonction du nombre de Hartmann, de l'amplitude de cette sinusoïde $\delta\theta$ est intéressante. Celle-ci commence par augmenter lorsque le nombre de Hartmann croît. Ce n'est qu'au delà d'une valeur suffisante du nombre de Hartmann ($Ha=30$ pour $\Delta T=14.7K$) que $\delta\theta$ entame finalement une décroissance jusqu'à zéro. Nous pensons que ce phénomène, apparemment paradoxal, ne peut pas être interprété comme une conséquence de la stabilisation de l'écoulement (viscosité effective réduite à la valeur moléculaire). La stabilisation de l'écoulement se situe en effet à des valeurs beaucoup plus faibles du nombre de Hartmann ($Ha = 5$ pour $\Delta T = 14.7 K$), (chapitre V). Pour dégager une explication, considérons l'équation de l'énergie au centre de la cavité. Dans cette équation, parmi les termes de convection, c'est le terme associé à la composante axiale U du champ de vitesse qui est prépondérant :

$$U * \partial T / \partial X = \alpha \Delta T, \quad \text{d'où} \quad U * G = \alpha \delta\theta / R_0^2,$$

soit ,

$$U = \alpha \delta\theta / G R_0^2. \quad (III.1)$$

Cet ordre de grandeur fait intervenir l'inverse du gradient de température axial G dans le centre de la cellule. C'est la rapide augmentation du gradient G dans le coeur, observable dès l'imposition du champ magnétique, qui est responsable du phénomène précité. Par ailleurs, cette forte augmentation de G s'explique par une réorganisation MHD de l'écoulement, puis par un freinage MHD du champ de vitesse en $1/Ha^2$. Le terme générique "réorganisation MHD" désigne la formation d'un coeur MHD entouré de couches de Hartmann dans le coeur de la cavité et de couches parallèles aux deux extrémités.

Sur la figure 6b, nous représentons l'écart de température adimensionné $\tilde{\theta}$, défini par la relation :

$$\tilde{\theta} = (T - T_1 - \Delta s T_1) / G R_0 - X / R_0.$$

Cet adimensionnement, basé sur l'écart de température $G * R_0$, est identique à celui proposé par Cowley [1994]. Cette fois, l'amplitude de $\tilde{\theta}$ diminue progressivement lorsque le nombre de Hartmann augmente, donc lorsque le nombre de Rayleigh modifié diminue. En conséquence, on peut prévoir que la composante axiale du champ de vitesse diminue de manière monotone dans le coeur. Pour un nombre de Hartmann de 320 (valeur maximale obtenue sur l'expérience MASCOT), la température devient uniforme dans la section centrale (figure 6a), suggérant ainsi l'apparition d'un régime dominé par la conduction (régimes thermiques II et I).

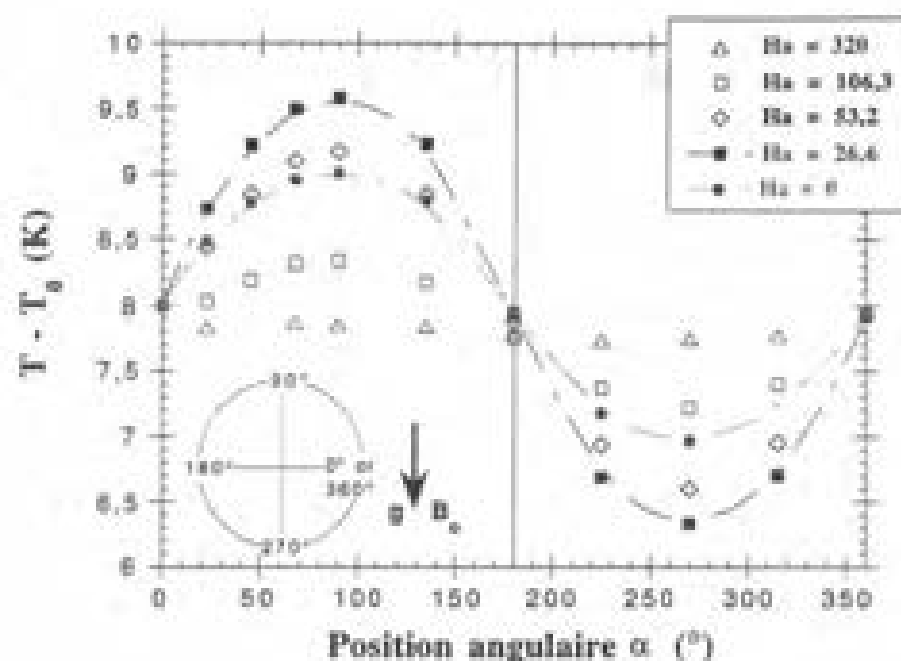


Figure 6a. Distribution de température autour du cercle central de la cellule : $T_{X=200}(\alpha)$ ($\Delta T = 14.7$ K)

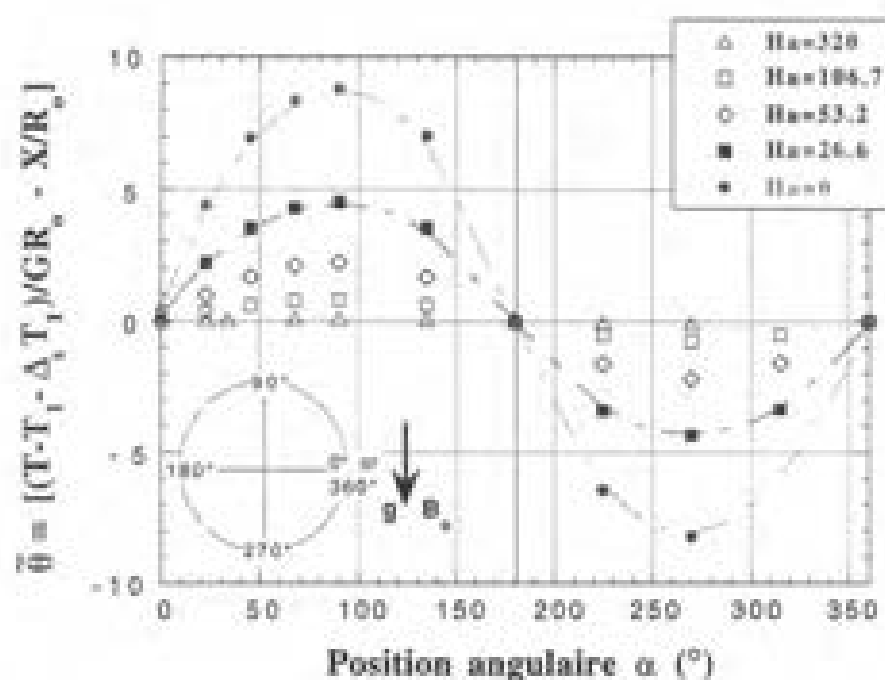


Figure 6b. Distribution de l'écart de température $\tilde{\theta}$, autour du cercle central de la cellule ($\Delta T = 14.7$ K)

2.3. Différence de potentiels électriques au centre, ordre de grandeur du champ de vitesse axial

Dans notre configuration expérimentale de géométrie circulaire, il est établi (Alboussière *et al* [1993], Cowley [1994]) que les couches de Hartmann demeurent électriquement inactives. Par suite, l'ordre de grandeur du champ de vitesse axial U , dans le coeur de l'écoulement, est de l'ordre de Gr_G/Ha^2 (si $Ha \gg 1$). Cette composante U du champ de vitesse équilibre à la fois :

1. la densité de courant électrique transverse J_Y , qui, en induisant des gradients de potentiels électriques verticaux, se referme naturellement dans le coeur MHD,
2. un gradient transverse de potentiel électrique, $\partial\Phi/\partial Y$.

En conséquence, les ordres de grandeur du champ de vitesse axial U , et du gradient $\partial\Phi/\partial Y$, sont identiques. L'ordre de grandeur de $\partial\Phi/\partial Y$ est estimé sur l'expérience MASCOT à travers la mesure de la différence de potentiel électrique [$\Phi(45^\circ) - \Phi(135^\circ)$], représentée sur la figure 7, en fonction du nombre de Hartmann. A faibles nombres de Hartmann, l'évolution linéaire du gradient transverse de potentiel électrique est prévisible. En effet, dans le coeur, l'ordre de grandeur de la vitesse axiale U , est obtenu par l'équilibre entre le frottement visqueux et la force de flottabilité : $U \sim (\nu / R_0) * Gr_G$. La loi d'Ohm projetée sur l'axe transverse ainsi que l'inactivité électrique des couches de Hartmann impliquent que :

$$\partial\Phi/\partial Y \sim U * B_0,$$

soit,

$$[\Phi(45^\circ) - \Phi(135^\circ)] \sim R_0 * \partial\Phi/\partial Y \sim Ha Gr_G.$$

Sur la figure 7, le pronostic analytique d'Alboussière *et al* [1993] est représenté en trait plein et le gradient axial de température G , est pris égal à sa valeur asymptotique G_∞ . L'accord avec nos mesures est excellent dès que le nombre de Hartmann est supérieur à 100. En particulier, la loi d'échelle :

$$[\Phi(45^\circ) - \Phi(135^\circ)] \sim Ha^{-1},$$

s'appliquant au potentiel électrique est validée si la condition $Ha \gg 1$ est effectivement réalisée. De même, comme prévu, le champ de vitesse axial, calculé à partir de la relation :

$$U \sim [\partial\Phi/\partial Y / B_0] \sim [\Phi(45^\circ) - \Phi(135^\circ)] / (R_0 * B_0),$$

présente, sur la figure 8, une décroissance monotone qui, si la condition $Ha > 100$, est remplie, suit la loi d'échelle : $U \sim Ha^{-2}$. Par comparaison, nous représentons sur la même figure, la vitesse axiale U , estimée à partir de la relation (III.1) issue de l'équation de l'énergie. L'accord entre ces deux estimations basées, respectivement, sur les distributions de température ou de potentiel électrique est sans équivoque.

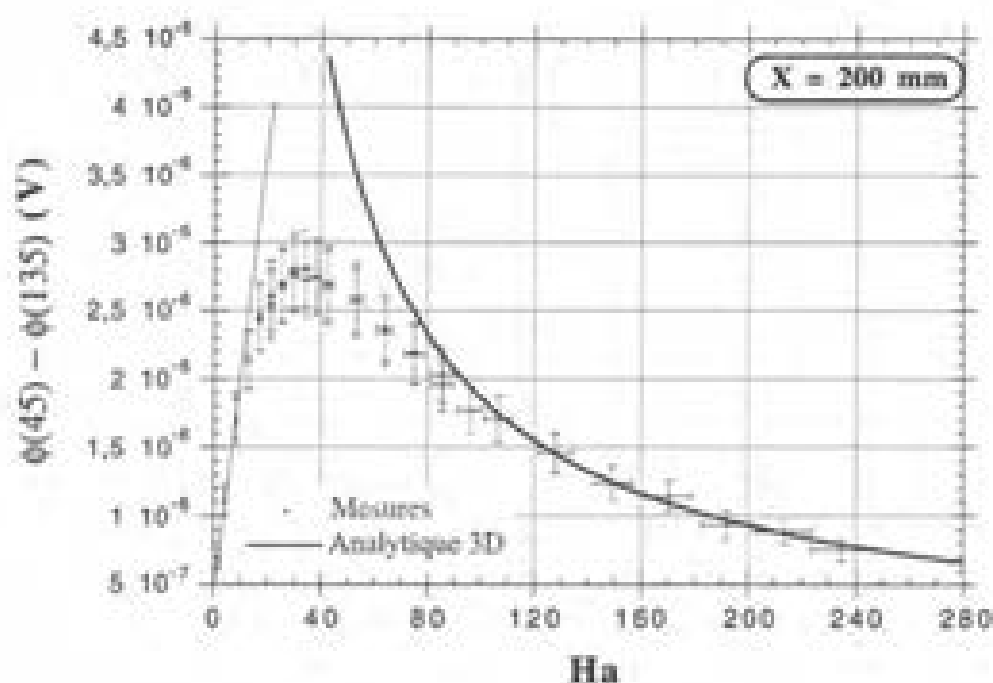


Figure 7. Différence de potentiels électrique maximale dans la section centrale de la cellule ($\Delta T = 14.7 \text{ K}$)

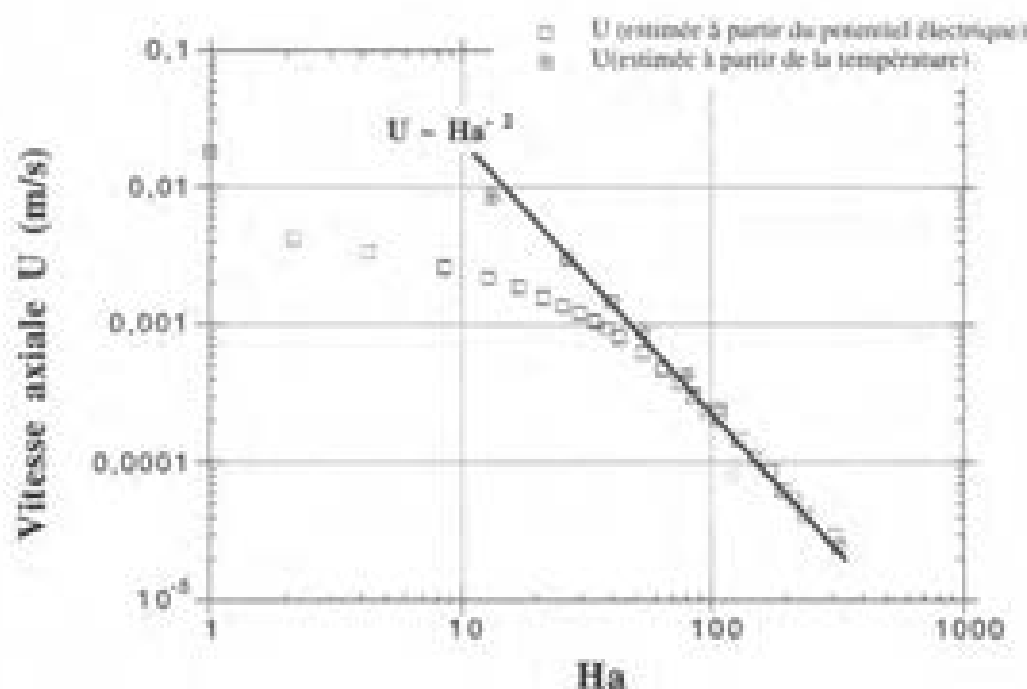


Figure 8. Composante axiale du champ de vitesse U , dans la section centrale de la cellule, calculée à partir de la loi d'Ohm.

3. Du régime thermique III au régime thermique II

Dans cette partie, nous présentons succinctement le résultat analytique pour l'écart de température adimensionné $\tilde{\theta}$, dans le coeur stratifié de l'écoulement, prédit par Cowley [1993]. Puis nous reprenons le développement asymptotique de Cowley [1994] et le prolongeons jusqu'à l'ordre $O(Ra_G^{-3})$. Ces deux points théoriques sont ensuite adaptés à l'étude de la distribution de température autour du cercle central dans le coeur de la cellule MASCOT. Les distributions de température obtenues autour de cercles localisés dans la zone de recirculation de l'écoulement ainsi que la distribution de potentiel électrique le long de la cavité sont également interprétées. À l'aide d'une analyse des ordres de grandeur, et d'une comparaison avec les résultats issus de la simulation numérique de Khalili et al [1994], nous identifions clairement un régime thermique III et sa transition vers un régime thermique II.

3.1. Rappels théoriques sur l'écoulement MHD de couches limites dans le coeur (Cowley [1993])

En considérant un régime thermique III, Cowley [1993] propose un modèle analytique pour décrire la distribution de température autour du coeur stratifié d'une cavité cylindrique horizontalement allongée. Ce modèle repose sur la condition essentielle que le champ de vitesse (ainsi que le champ électrique) n'évolue que très faiblement dans le coeur MHD avec l'abscisse X , et suppose en outre, que les conditions $Ra_G \gg 1$ et $Ha \gg 1$ sont remplies. Par ailleurs, l'épaisseur adimensionnée δ_t de la couche limite thermique enveloppant le coeur de l'écoulement, de l'ordre de Ra_G^{-1} , est supposée largement plus grande que l'épaisseur de la couche de Hartmann, de l'ordre de Ha^{-1} . Ce modèle est ainsi valable à la fois dans le coeur et les couches limites thermiques (couches de Hartmann non comprises). Cet écoulement de couches limites est schématisé sur la figure 9.

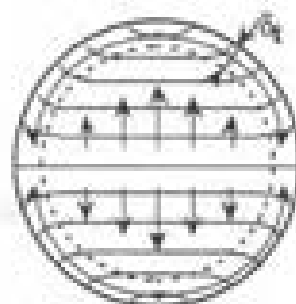


Figure 9. Isothermes et écoulement de couches limites dans une section du coeur stratifié.

Pour ce régime thermique III, le point intéressant à mentionner est l'échange de fluide entre le coeur stratifié et la couche limite thermique périphérique. Comme pour le cas de la configuration G-H étudiée par Gill [1966], le fluide est aspiré dans la couche limite thermique (phénomène dû

à la courbure des isothermes au voisinage de la paroi) puis rejeté dans le coeur, induisant un faible écoulement secondaire transversal. En conservant la notation adimensionnée $\tilde{\theta}$, la solution déterminée par l'auteur sur le contour de la section s'écrit :

$$\tilde{\theta} = \frac{1}{9} Ra_G \sin \alpha [5 + \cos 2\alpha]. \quad (\text{III.2})$$

Au mode principal, en $\sin \alpha$, mis également en évidence par interpolation de la distribution de température autour du cercle central $T_{X=200}(\alpha)$, se superpose un mode supplémentaire en $\cos 2\alpha$. Ce dernier mode intervient à l'ordre $O(Ra_G)$ pour un écoulement stratifié.

3.2. Développement asymptotique à l'ordre $O(Ra_G^3)$ pour la température dans le coeur ($Ra_G \ll 1$)

Un développement asymptotique en puissance du nombre de Rayleigh modifié Ra_G , supposé très petit devant l'unité, permet de déterminer la solution complète de l'écoulement thermogravitaire dans le coeur MHD de la cellule MASCOT horizontalement élançée. Cette étude analytique est réalisée par Cowley [1994] jusqu'à l'ordre $O(Ra_G^2)$ (cf. chapitre I). La solution trouvée par l'auteur concerne les régimes thermiques II à nombres de Hartmann très grands. Afin de prendre en compte l'existence du mode $\cos 2\alpha$, décelé sur la distribution expérimentale de température pariétale sur le cercle central, montrons que le développement asymptotique précédent doit être calculé jusqu'à l'ordre $O(Ra_G^3)$. En effet, l'écart de température adimensionné s'écrit, dans le cadre de cette théorie asymptotique, sous la forme :

$$\tilde{\theta} = \theta_0 + Ra_G \theta_1 + Ra_G^2 \theta_2 + Ra_G^3 \theta_3 \quad .$$

Cowley [1994] montre que seul le mode $\sin \alpha$, est mis en évidence par la contribution à l'ordre $O(Ra_G)$ pour la température : θ_1 . De plus, si un régime établi est présent au centre de la cellule, la contribution à l'ordre $O(Ra_G^2)$, θ_2 , est trouvée identiquement nulle.

Poursuivons ce développement asymptotique jusqu'à l'ordre $O(Ra_G^3)$, une perturbation en $\cos 2\alpha$, apparaît dans la température à l'ordre $O(Ra_G^3)$, θ_3 . Compte tenu des rappels présentés au chapitre I, permettons-nous de n'écrire ici que l'équation à résoudre, c'est à dire, l'équation de l'énergie à l'ordre $O(Ra_G^3)$:

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial Y^2} + \frac{\partial \theta_3}{\partial Z^2} = V_1 * \frac{\partial \theta_1}{\partial Y} + W_1 * \frac{\partial \theta_1}{\partial Z} \quad (\text{III.3})$$

Les notations Y et Z désignent les axes transverse et vertical. Les champs de vitesse et de température à l'ordre $O(Ra_G)$ sont déterminés par Cowley [1994] :

$$\theta_1 = \frac{1}{4} Z (3 - Y^2 - Z^2), \quad (\text{III.3-1})$$

$$V_1 = \frac{1}{12} Y (Y^2 + 3Z^2 - 1), \quad (\text{III.3-2})$$

et

$$W_1 = \frac{-1}{12} Z (Z^2 + 3Y^2 - 1). \quad (\text{III.3-3})$$

Par suite, l'équation (III.3) à résoudre prend la forme suivante :

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial Y^2} + \frac{\partial \theta_3}{\partial Z^2} = \frac{-1}{24} Z Y^2 (Y^2 + 3Z^2 - 1) + \frac{1}{48} Z (3Y^2 + Z^2 - 1) (3Z^2 + Y^2 - 3). \quad (\text{III.4})$$

Pour cette équation aux dérivées partielles, à résoudre dans un domaine 2D qui n'est autre que la section centrale de la cavité, il n'existe pas, a priori, de démarche analytique simple conduisant à une solution complète pour la température θ_3 . En conséquence, cette équation est résolue par la méthode des éléments finis 2D, à l'aide d'un maillage suffisamment raffiné, constitué d'éléments finis triangulaires linéaires isoparamétriques. Cette résolution numérique s'appuie sur le logiciel MATLABTM. Sur la figure 10 ci-dessous, nous précisons la géométrie du domaine Ω sur lequel est résolu ce problème, ainsi que les conditions aux limites portant sur la température θ_3 . Le domaine Ω correspond à la moitié supérieure de la section. Le maillage est ainsi suffisamment raffiné pour que la solution convergée soit obtenue avec une précision de l'ordre de 0.1 %. Les propriétés de parité portant sur les champs de vitesse et de température à l'ordre $O(Ra_0)$, ainsi que les équations (III.3), (III.3-1) à (III.3-3), et (III.4), impliquent sur la partie inférieure du contour $\partial\Omega$ ($Z=0$), la condition aux limites de Dirichlet suivante : $\theta_3 = 0$.

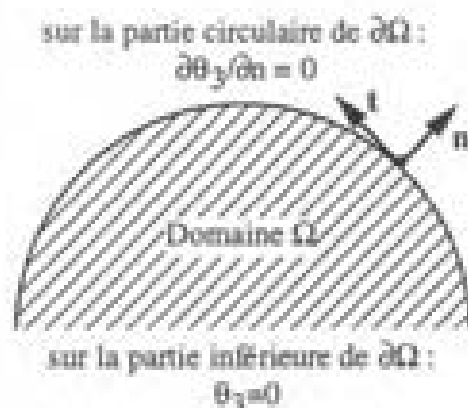


Figure 10. Domaine de résolution hachuré Ω , (dans la section centrale) et conditions aux limites sur θ_3 .

Sur les figures 11a et 11b, nous représentons, successivement, la carte des isovaleurs du terme θ_3 , puis sa distribution pariétale sur le contour de la section centrale. Cette distribution est

interpolée avec une méthode des moindres carrés, à une précision meilleure que 0,1%, par l'expression :

$$\theta_3 = 10^{-3} * \{1.138 \sin \alpha + 1.530 \sin \alpha \cos 2\alpha\}.$$

Finalement, ces calculs mènent à l'expression suivante pour l'écart de température adimensionné $\bar{\theta}$, autour de la section centrale :

$$\begin{aligned} \bar{\theta} = Ra_G * 0.5 \sin \alpha + \\ Ra_G^3 * 10^{-3} * \{1.138 \sin \alpha + 1.530 \sin \alpha \cos 2\alpha\}. \end{aligned} \quad (III.5)$$

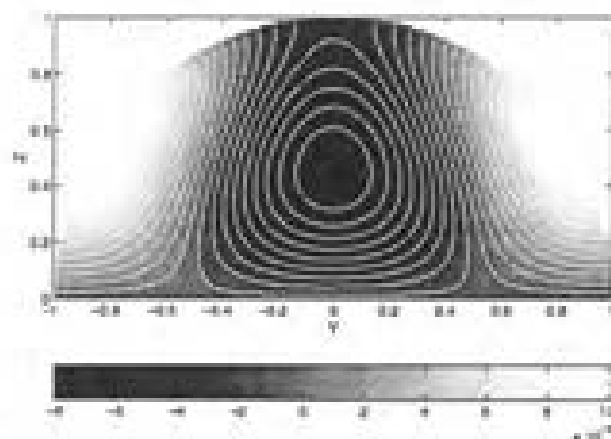


Figure 11a. Carte des isovaleurs pour la température θ_3 , obtenue après résolution numérique de l'équation (III.4) sur le domaine Ω .

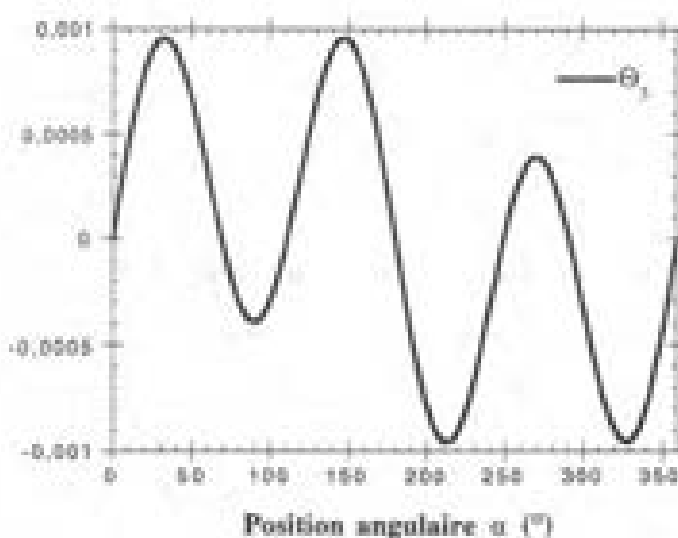


Figure 11b. Distribution de température pariétale autour de la section centrale pour le terme θ_3 , calculé numériquement.

3.3. Transition vers un régime thermique II

Pour un régime thermique III ou II, les modélisations analytiques conduisent toujours à la présence d'un mode $A \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(2\alpha)$, dans la distribution de température pariétale pour l'écart de température $\bar{\theta}$ autour de la section centrale de la cellule. C'est la loi d'échelle contrôlant l'amplitude A , de ce mode qui distingue le régime III ($A \sim Ra_G$) du régime II ($A \sim Ra_G^3$). Autrement dit, nous venons d'établir un critère de distinction entre les deux régimes uniquement basé sur la distribution de température autour de la section centrale de la cavité.

3.3.1. Lois d'échelle pour la température autour du cercle central

Afin de mettre en évidence dans la distribution de température expérimentale $T_{X=200}(\alpha)$, la présence d'un mode en $\cos 2\alpha$, de faible amplitude, nous représentons sur la figure 12a, la distribution de température $\bar{\theta} / \sin \alpha$, pour des inclinaisons différentes de 0° , 180° ou 360° .

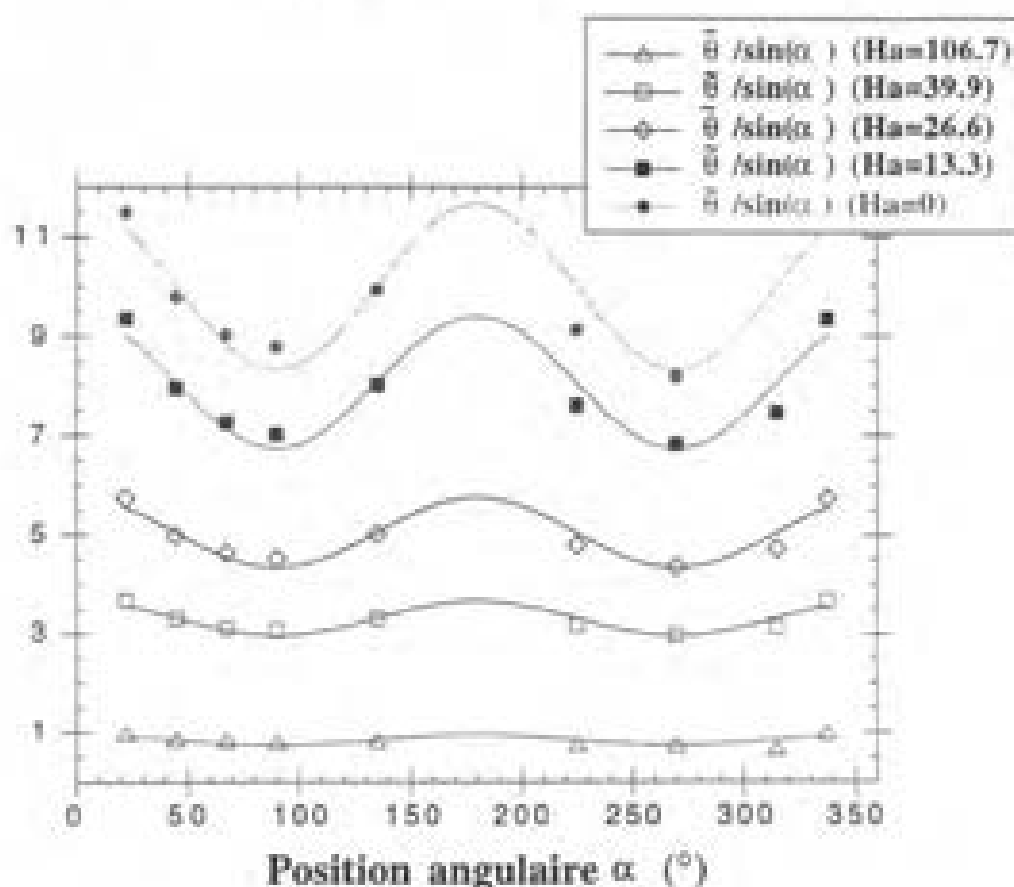


Figure 12a. Distribution pariétale $\bar{\theta} / \sin \alpha$, en fonction du nombre de Hartmann autour de la section centrale de la cellule MASCOT.

Sur la figure 12b, les amplitudes des distributions $\tilde{\theta}$ et $\tilde{\theta} / \sin \alpha$, sont reportées dans un diagramme log-log en fonction du nombre de Rayleigh modifié.

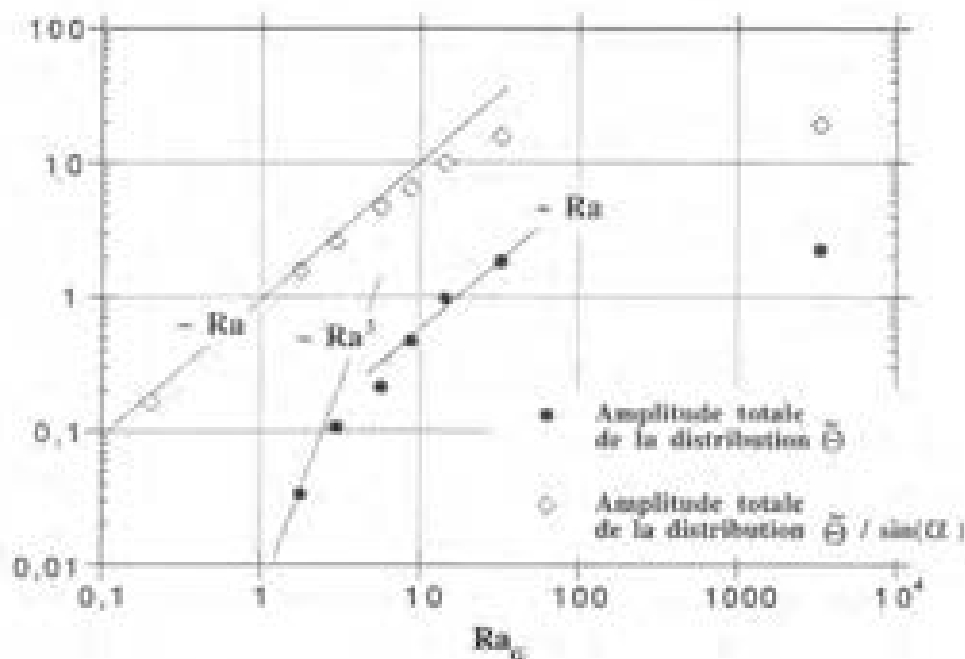


Figure 12b. Lois d'échelle pour les amplitudes des modes $\sin(\alpha)$ et $\sin(\alpha) \cdot \cos(2\alpha)$ mesurées sur la distribution de température $T_{X=200}(\alpha)$.

Comme prédit par la théorie pour le cas d'un cœur stratifié (Cowley [1993]) ou bien pour le cas d'un écoulement de cœur (Cowley [1994]), l'analyse de cette figure montre que l'amplitude de la distribution de température adimensionnée $\tilde{\theta}_{X=200}(\alpha)$, égale en première approximation à l'amplitude du mode $\sin \alpha$, est proportionnelle au nombre de Rayleigh modifié dès que la condition $Ha \gg 1$ est réalisée (sur l'expérience, $Ha > 30$). Observons l'évolution de l'amplitude, plus faible, du second mode en $\sin \alpha \cdot \cos 2\alpha$. Pour un régime thermique II, l'amplitude de ce mode doit être proportionnelle au cube du nombre de Rayleigh. Cette prédiction théorique n'est pas complètement observée sur l'expérience pour la gamme des nombres de Rayleigh disponibles. Toutefois, la tendance vers cette loi d'échelle est bien esquissée sur la figure 12b pour des nombres de Rayleigh voisins de l'unité. Ce résultat n'est pas surprenant dès lors que la théorie de Cowley [1994], établie dans le cadre d'un régime thermique II, ne peut de toute façon être appliquée que si la condition $Ra_G^{-2} \ll Ra_G \ll 1$ est observée. Cette analyse nous conduit à deux conclusions intéressantes valables sur deux gammes distinctes du nombre de Rayleigh modifié :

1. $10 < Ra_G < 50$: un régime thermique III caractérisé par un écoulement concentré à l'intérieur des couches limites est obtenu expérimentalement dans la cellule MASCOT,

2. $1 < Ra_G < 10$: pour cette gamme du nombre de Rayleigh modifié, seule la transition d'un régime thermique III vers un régime thermique II est mise en évidence expérimentalement.

3.3.2. Distributions de température le long du cylindre

Nous présentons dans ce paragraphe l'analyse des distributions de température autour de cercles localisés ailleurs que dans le centre de la cellule. Les déformations prononcées de ces distributions apportent une confirmation qualitative du diagnostic quantitatif précédemment établi.

Ecoulement à nombre de Rayleigh élevé

La figure 13a représente les distributions pariétales de température $T_{x=100}(\alpha)$, $T_{x=200}(\alpha)$ et $T_{x=300}(\alpha)$, pour un régime thermique III associé aux nombres sans dimension : $Gr_{\Delta T} = 10^6$ et $Ha = 26.6$. Ces distributions de température sont centrées sur le coeur où un gradient axial de température G faible, de l'ordre de 3.3 K/m, s'applique de manière quasi-uniforme. Pour un tel régime thermique, le nombre de Grashoff, ou bien le nombre de Rayleigh modifié, construits à l'aide du gradient axial de température G , perdent leur pertinence puisque la stratification de coeur implique une diffusion verticale majoritaire et une diffusion horizontale minoritaire. Pour ce régime de couches limites, la différence de température imposée entre les deux extrémités ($\Delta T = 18K$) de la cellule se concentre à travers la faible épaisseur des couches limites jouxtant les deux fronts de la cellule.

Une déformation centro-symétrique est nettement mise en évidence dans le coeur, sur les deux distributions de température $T_{x=100}(\alpha)$ et $T_{x=300}(\alpha)$, de part et d'autre du cercle central de la cavité. Cette déformation est compatible avec un régime de couches limites pour l'écoulement transversal dans le coeur stratifié de la cellule. Nous interprétons la déformation de ces deux profils de température par la présence d'une composante transverse du champ de vitesse V , de module important. En effet, pour un tel régime thermique, le terme de convection $(\mathbf{u} \cdot \nabla T)$, dans l'équation de l'énergie, est pondéré par un nombre de Rayleigh très grand devant l'unité : ce terme de convection gouverne dans ce cas le transport de la température. Comme illustré sur la figure 13b, à l'échange de fluide entre le coeur et la couche limite thermique correspond donc une divergence des lignes de courant à l'intérieur de la couche limite thermique à la paroi longitudinale. En outre, la symétrie centrale, toujours valable quel que soit le régime thermique, impose que la distribution de température autour du cercle central $T_{x=200}(\alpha)$, demeure parfaitement anti-symétrique par rapport au plan horizontal longitudinal XY.

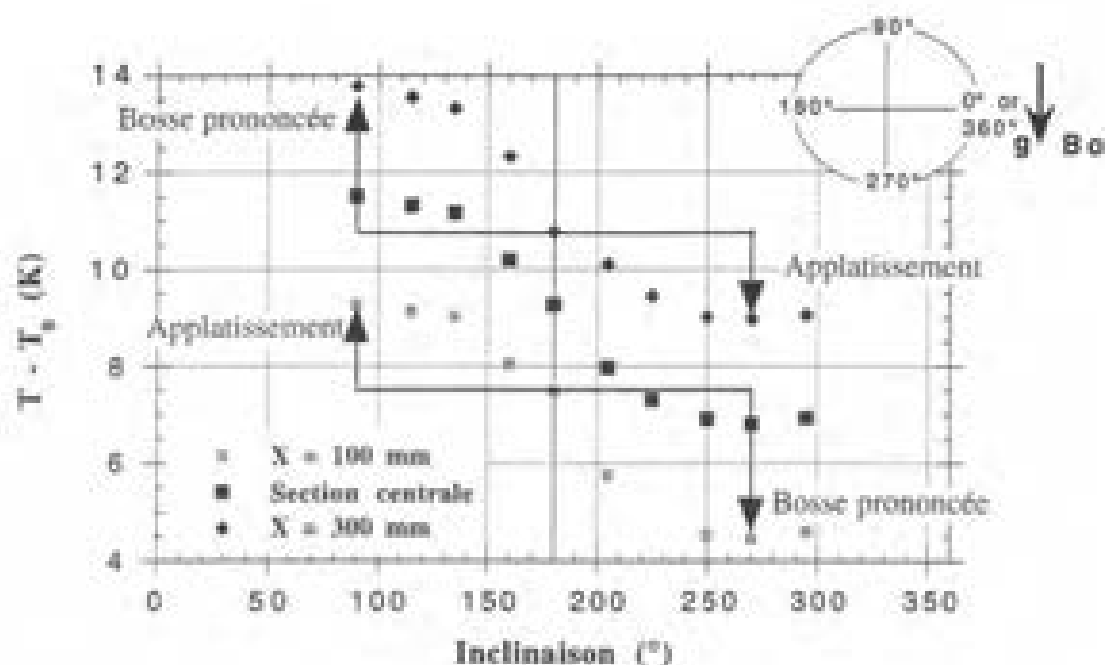


Figure 13a. Déformation centro-symétrique sensible sur la distribution de température autour de deux cercles localisés de part et d'autre du centre de la cellule ($Gr_{\Delta T} = 10^6$, $Ha = 26.6$)

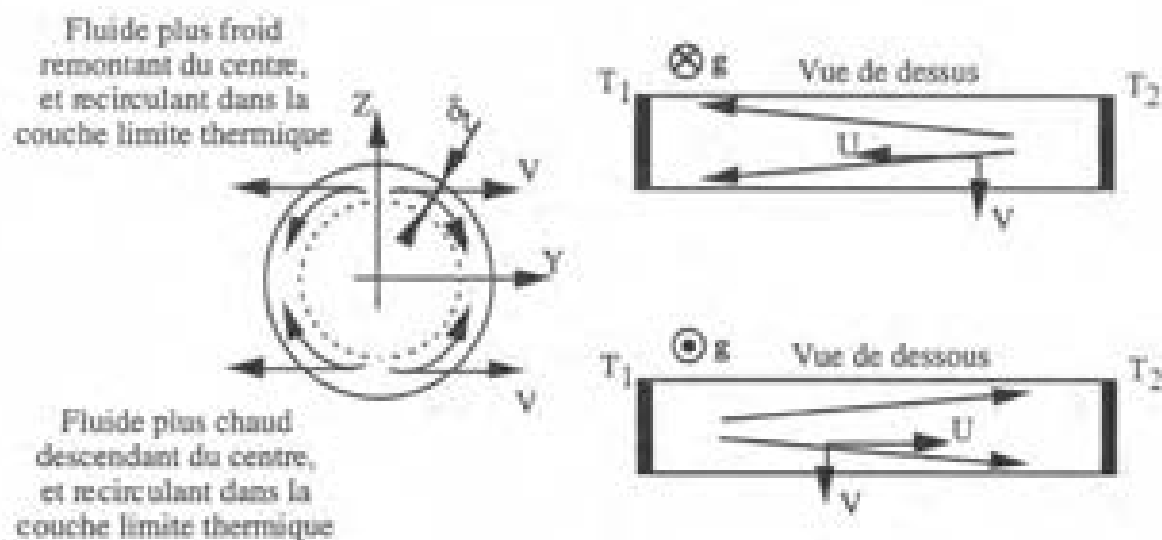


Figure 13b. Schéma de l'influence de la stratification sur l'écoulement dans la région de coeur (d'après figure 13a).

Vers de faibles nombres de Rayleigh modifiés

Un rapide accroissement du gradient de température axial G est constaté lorsque le nombre de Hartmann augmente. Autrement dit, la stratification de coeur impliquant un gradient de température vertical majoritaire est rapidement supplantée par une diffusion de la température majoritairement horizontale lorsque le nombre de Rayleigh $Ra_{\Delta T}$ diminue. Dans ce dernier cas, le nombre de Rayleigh pertinent à considérer doit non plus être bâti sur le gradient de température vertical dans le coeur stratifié $\Delta T / R_m$ (régime thermique III), mais sur le gradient de température horizontal G devenu prépondérant (pertinence du nombre de Rayleigh modifié Ra_G).

Nous considérons que le concept de couche limite thermique peut encore être conservé pour analyser la transition du régime thermique III vers le régime thermique II. Bien entendu, si un régime thermique I gouverne l'écoulement, ce concept n'a intrinsèquement plus aucun sens pour deux raisons :

1. l'écoulement de recirculation est entièrement contrôlé par la fermeture des lignes de courant de l'écoulement de coeur,
2. la conduction est uniforme sur la totalité de la cellule.

Nos conditions expérimentales ne permettent pas d'atteindre ce régime thermique I et sont à peine suffisantes à l'installation d'un régime thermique II. Les distributions de température pariétales $T_{ax12}(\alpha)$ et $T_{ax30}(\alpha)$, obtenues autour de cercles voisins de l'extrémité froide de la cellule, sont représentées sur les figures 14a et 14b, pour quatre nombres de Rayleigh modifiés. Pour le plus grand nombre de Rayleigh modifié ($Ra_G = 8.8$), la déformation centro-symétrique, typique d'un régime thermique III, est reconnaissable par la forme plus pointue du profil de température au voisinage de l'inclinaison $\alpha = 270^\circ$, et par un aplatissement marqué au voisinage de l'inclinaison $\alpha = 90^\circ$. Si le nombre de Rayleigh Ra_G diminue (par augmentation du nombre de Hartmann), l'apparition d'une déformation opposée est constatée sur les deux distributions de température. Cette inversion de déformation, valable aussi pour les distributions $T_{ax398}(\alpha)$ et $T_{ax395}(\alpha)$, est également centro-symétrique. En outre, une observation plus précise de l'avènement de cette inversion de déformation est menée sur des distributions de température autour de cercles progressivement éloignés du front froid. Pour un nombre de Rayleigh modifié fixé, elle apparaît clairement et prioritairement autour du cercle le plus proche de l'extrémité considérée. Si le nombre de Rayleigh modifié continue de décroître, cette inversion gagne progressivement les cercles voisins en direction du coeur de l'écoulement. Ce phénomène peut être interprété comme la conséquence du développement des couches limites thermiques le long des deux extrémités, dont l'épaisseur caractéristique δ_t est proportionnelle au nombre adimensionnel $(Pr Ra^*)^{-1/4}$. Le nombre de Rayleigh Ra^* est proportionnel au gradient de température axial G^* , localement défini au voisinage de

l'extrémité. Lors de la transition du régime thermique III vers le régime thermique II, le gradient axial de température dans le coeur G augmente tandis que le gradient axial de température G^* diminue nécessairement. Par conséquent, l'épaisseur caractéristique δ_l augmente pendant la transition entre ces deux régimes. La déformation inversée mise en évidence sur les distributions de température précédentes concrétise la variation de l'épaisseur de la couche limite thermique δ_l avec la coordonnée verticale Z : au front froid, cette couche limite thermique se développe à partir du haut de la cellule en imposant une nouvelle asymétrie. Pour une croissance prolongée du nombre de Hartmann, le nombre de Rayleigh modifié devient suffisamment faible pour que le coeur de l'écoulement caractérisé uniquement par de la diffusion horizontale (donc par un régime établi), s'étende vers les extrémités de la cellule. Dans ce cas, la nouvelle déformation du profil de température s'atténue en priorité cette fois sur les cercles les plus voisins du coeur, pour tendre vers une distribution de température pariétale circulaire, exactement anti-symétrique par rapport au plan horizontal longitudinal XY, c'est à dire, semblable à la distribution de température $T_{\alpha=200}(\alpha)$, autour du cercle central de la cellule. Cette dernière tendance est donc ressentie en priorité sur la distribution de température $T_{\alpha=30}(\alpha)$ (figure 14b). Cette interprétation qualitative est validée dans les pages suivantes où l'interprétation de la distribution de potentiel électrique ainsi que l'analyse des ordres de grandeur proposées apportent une confirmation quantitative. Il nous semble donc raisonnable de supposer que pour des nombres de Rayleigh modifiés plus faibles que ceux accessibles sur l'expérience MASCOT ($Ra_G < 0.1$), la prédiction analytique de Cowley [1994] doit s'appliquer.

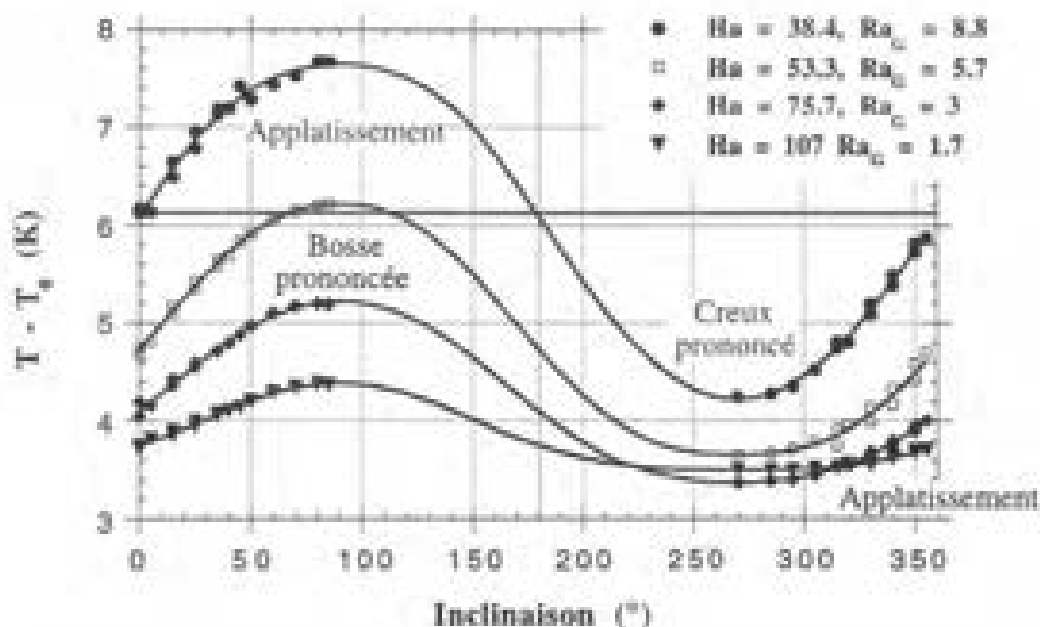


Figure 14a. Inversion centro-symétrique de la déformation sur le cercle localisé à l'abscisse $X = 12$ mm ($\Delta T = 14.7$ K).

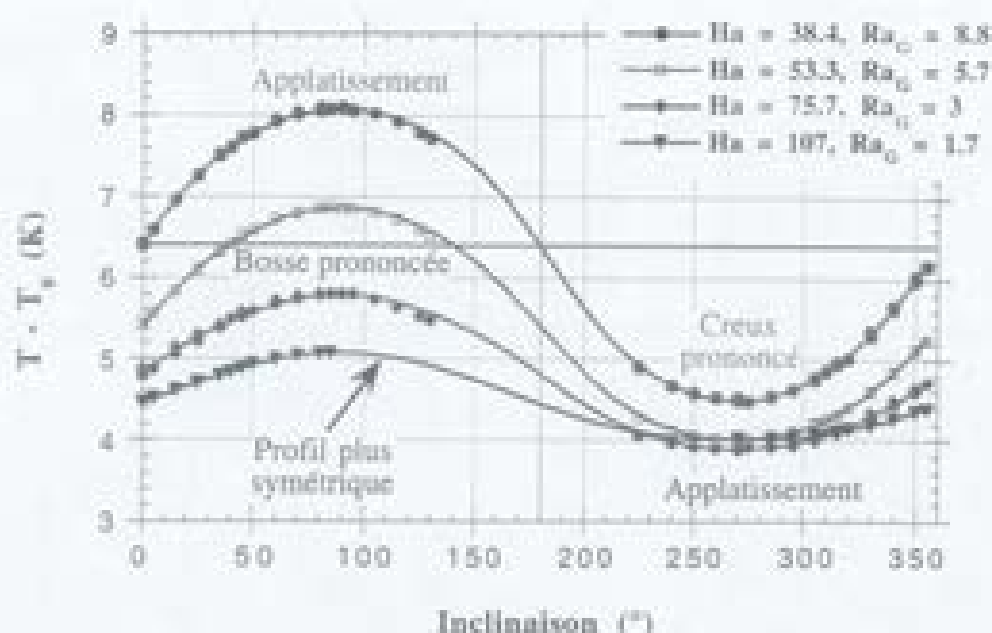
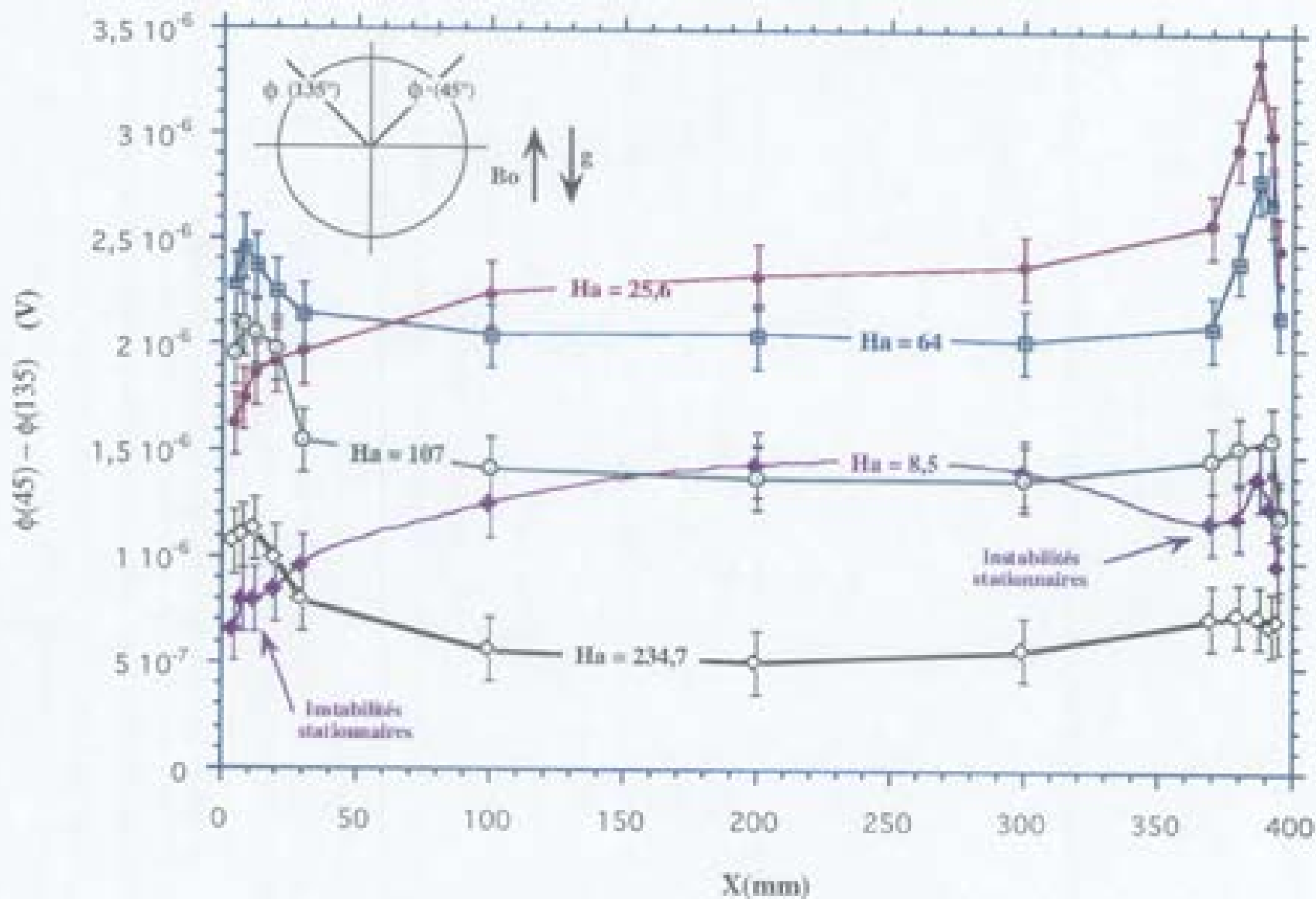


Figure 14b. Inversion centro-symétrique de la déformation sur le cercle localisé à l'abscisse $X = 30$ mm ($\Delta T = 14.7$ K).

3.3.3. Distribution du potentiel électrique le long de la partie supérieure de la cellule

Cette partie propose l'analyse de l'écoulement à partir de mesures de potentiels électriques effectuées sur la cellule. Lorsque l'écoulement est laminaire, pour deux nombres de Hartmann différents ($Ha=25.6$ et $Ha=107$), des mesures réalisées suivant le protocole présenté au chapitre II, à l'aide de la sonde mobile mixte (SMM), ont mis en évidence l'anti-symétrie du potentiel électrique par rapport au plan vertical longitudinal XZ ($\Phi(-Y) = -\Phi(Y)$) dans la moitié supérieure de la cellule : c'est à dire pour des inclinaisons comprises entre 0° et 180° . Une pollution de ces mesures par des phénomènes d'origine thermoélectrique (chapitre II), qui se traduit par une absence de reproductibilité, nous oblige par ailleurs, à ne mesurer que la différence maximale de potentiel électrique dans une section donnée de la cellule. Les distributions pariétales de potentiels électriques représentées sur la figure 15 sont donc l'évolution de la différence : $\Delta\Phi (= \Phi(45^\circ) - \Phi(135^\circ))$, en fonction de l'abscisse X . Rappelons également l'existence de la symétrie centrale par rapport au centre de la cellule caractérisant l'écoulement thermogravitaire MHD étudié. Cette symétrie se traduit, par exemple, par le fait que si un *extremum* est mis en évidence sur la distribution de potentiel électrique le long de la partie supérieure de la cellule : $\Delta\Phi = f(X)$, près du front chaud, alors cet *extremum* existe

Figure 15. Distribution de la différence de potentiels électriques $\Delta\Phi$, dans la partie supérieure de la cellule MASCOT ($\Delta T = 14,7$ K).



également sur la distribution également sur la distribution de potentiel électrique le long de la partie inférieure de la cellule au voisinage du front froid. L'analyse du profil de potentiel électrique $\Delta\Phi = f(X)$, repose essentiellement sur la loi d'Ohm :

$$\mathbf{J}/\sigma = -\nabla\Phi + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0$$

Projetée sur les trois axes principaux de la cellule, cette loi délivre les équations (III.6-1) à (III.6-3) :

$$V B_0 = J_x / \sigma + \partial\Phi / \partial X, \quad (\text{III.6-1})$$

$$U B_0 = -(J_Y / \sigma + \partial\Phi / \partial Y), \quad (\text{III.6-2})$$

$$0 = J_Z / \sigma + \partial\Phi / \partial Z. \quad (\text{III.6-3})$$

Toute variation de pente ou existence d'un *extremum* observée sur la distribution $\Delta\Phi = f(X)$, (figure 15), est donc liée aux deux composantes transverse et axiale du champ de vitesse notées, respectivement, V et U . Sur la figure 15, les dérivées axiales du potentiel électrique sont maximales au voisinage des extrémités de la cellule. L'analyse de la distribution de température $T_{0=45^\circ}(X)$ (figure 2b), révèle l'existence d'effets tridimensionnels importants sur l'écoulement recirculant. Dans les quatre quadrants d'une section localisée au voisinage des extrémités, le signe de la dérivée axiale du potentiel électrique est compatible avec la présence d'une composante transverse du champ de vitesse V , dont le signe se déduit de la divergence des trajectoires des particules fluides associée à la recirculation de l'écoulement. Une deuxième interprétation, complémentaire de l'interprétation précédente, est liée à l'effondrement de la composante axiale U , du champ de vitesse lors de la recirculation de l'écoulement près des fronts de la cellule. Par suite, le module de la dérivée transverse du potentiel électrique $\partial\Phi/\partial Y$, dont l'ordre de grandeur n'est autre que $\Delta\Phi/R_0$, diminue brusquement.

Nombres de Rayleigh élevés

Pour des nombres de Hartmann modérés ($Ha < 75$), l'inertie ne peut être négligée au voisinage des extrémités de la cellule. Son influence est clairement détectée par la présence remarquée d'un *extremum* au voisinage du front chaud, tandis qu'au voisinage du front froid, la distribution de potentiel est croissante, monotone ($Ha=25.6$). Si le nombre de Hartmann est faible ($Ha=8.5$), le profil davantage torturé de la distribution $\Delta\Phi$, peut être interprété par la présence d'instabilités stationnaires liées à l'inertie localisée près des fronts. Ce type d'instabilités, déjà mis en évidence par Hart [1983] en absence de champ magnétique et pour des fluides de faibles nombres de Prandtl, est conditionné par la valeur du nombre de Reynolds qui, si l'inertie n'est pas négligeable, s'exprime ici comme le rapport :

$$Gr_{\Delta T}^{1/2}/Ha^2,$$

autrement appelé, nombre de Lykoudis. Dans tous les cas, lorsque le nombre de Hartmann augmente, l'importance relative de l'inertie par rapport à l'équilibre entre les deux couples associés aux forces de flottabilité et de Laplace, prépondérant dans le coeur, diminue nécessairement. La distribution de potentiel électrique $\Delta\Phi$ met effectivement en évidence le fait important que l'extremum localisé au voisinage du front chaud disparaît au profit d'un nouvel extremum apparaissant au voisinage du front froid lorsque le nombre de Hartmann est de l'ordre de 100. Nous rapprochons cette observation au fait que parallèlement, l'ordre de grandeur du nombre de Rayleigh modifié passe de 10 ($Ha \sim 10$) à 1 ($Ha \sim 100$).

A nombres de Rayleigh Ra_G modérés ($Ra_G \sim 1$)

Avant que le régime de coeur ne supplante totalement le régime de couches limites précédemment commenté, l'écoulement thermogravitaire MHD étudié expérimentalement est caractérisé par une transition lente d'un régime III vers un régime thermique II. Cette transition, mise en évidence par le diagnostic établi à partir des distributions de température autour de cercles situés au voisinage du front froid de la cellule, est marquée par l'influence nette de la distribution de l'écart de température θ , sur le champ de vitesse u . Cette influence est exactement la source du maximum détecté sur $\Delta\Phi$, près du front froid, dans la partie supérieure de la cellule. Considérons que le gradient uniforme de température G dans le coeur est responsable de la circulation principale de Hadley en engendrant un couple de flottabilité moteur, équilibré par le couple magnétique (chapitre I). La figure 15 met en évidence le fait que pour des nombres de Rayleigh modérés, la dérivée axiale du potentiel électrique est nulle sur l'ensemble du coeur, aux incertitudes expérimentales de mesure près. Nous montrons ci-dessous par une analyse des ordres de grandeur, que l'écart de température adimensionné $\tilde{\theta}$, défini par rapport au profil linéaire de température sur la génératrice d'inclinaison $\alpha=0^\circ$, est source d'une composante axiale supplémentaire \tilde{U} , responsable elle-même de l'extremum local constaté sur $\Delta\Phi$ dans la zone hors-coeur froide.

Analyse des ordres de grandeur ($Ra_G \sim 1$)

Dans le coeur MHD, au voisinage du front froid, l'équation adimensionnée du tourbillon (cf. chapitre I) projetée sur l'axe transverse Y , s'écrit :

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial X} = \frac{\partial \tilde{j}_Y}{\partial Z}.$$

Tout gradient axial de température $\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial X}$ engendre donc une perturbation de la densité de courant transverse \tilde{j}_Y . Dans cette analyse, la densité de courant électrique et le potentiel électrique sont adimensionnés, respectivement, par les expressions : $\frac{\sigma v B_0}{R_0} \frac{Gr_G}{Ha^2}$ et $v B_0 \frac{Gr_G}{Ha^2}$ où Gr_G est le

nombre de Grashoff calculé avec le gradient axial de température G dans le coeur. Représentons la distribution de l'écart de température adimensionné $\tilde{\theta}$, pour un nombre de Hartmann égal à 107, c'est à dire un nombre de Rayleigh modifié Ra_G égal à 1.8 (de l'ordre de l'unité), sur les génératrices inclinées à $\pm 45^\circ$ (figure 16). Le point remarquable à mentionner est que les pentes observées sur ces deux génératrices sont certes de signes opposés, mais surtout, de valeurs absolues radicalement différentes. Cette observation confirme que la théorie de Cowley [1994], concernant uniquement les cas d'écoulement en régime thermique II (théorie basée sur l'hypothèse : $Ra_G^2 \ll Ra_G \ll 1$), ne peut s'appliquer dans le cadre de cette analyse.

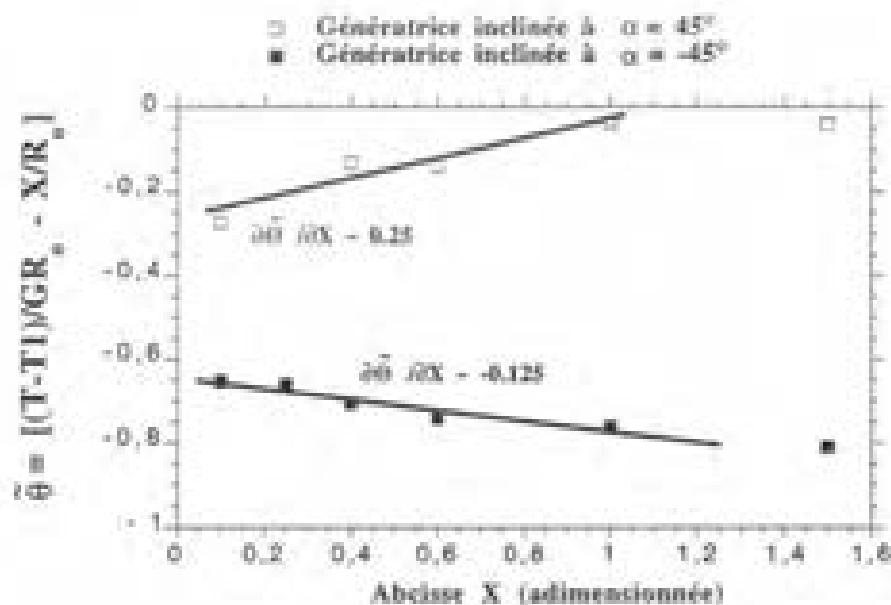


Figure 16. Gradients axiaux de température $\partial \tilde{\theta} / \partial X$, en haut et en bas de sections localisées au voisinage du front froid ($Ha=107$, $\Delta T=14.7$ K).

En conservant nos notations adimensionnelles, l'inactivité électrique des couches de Hartmann et la loi d'Ohm projetée sur l'axe transverse imposent l'égalité des ordres de grandeur suivante :

$$j_Y = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial Y} = 0.$$

En conséquence, le gradient axial de température $\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial X}$ impose dans la partie supérieure de la cellule, au voisinage de la couche parallèle, dans le coeur MHD de l'écoulement, une perturbation supplémentaire sur la différence mesurée $\Delta \Phi$, estimée égale à :

$$vB_\infty \frac{Gr_G}{Ha^2} = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial X}.$$

Après application numérique pour le cas $Ha=107$, cette analyse des ordres de grandeur prévoit une augmentation locale sur $\Delta\Phi$, de l'ordre de $4 \cdot 10^{-7}$ V. Par comparaison, l'augmentation mesurée sur la distribution expérimentale de potentiel électrique est de l'ordre de $5,2 \cdot 10^{-7}$ V. L'accord de cette analyse des ordres de grandeur avec l'expérience montre que tant que l'épaisseur de la couche limite thermique d'extrémité varie avec la coordonnée verticale, le gradient axial de température augmente avec Z au voisinage du front froid et diminue avec Z au voisinage du front chaud, de manière non impaire. Cette évolution du gradient $\frac{\partial\theta}{\partial X}$ entraîne une modification de la composante axiale U du champ de vitesse, qui se traduit sur la distribution du potentiel électrique par un *extremum* local. Cette conclusion, valable pour un nombre de Rayleigh modifié de l'ordre de l'unité, est également validée par l'étude numérique 3D présentée au chapitre suivant.

Accord entre l'expérience et les simulations numériques 2D de Khalili *et al* [1994] dans le plan vertical longitudinal XZ

Khalili *et al* [1994] adoptent un point de vue bidimensionnel en simulant numériquement deux écoulements thermogravitaires MHD dans une configuration G-H carrée : la composante horizontale transverse du champ de vitesse V , n'est donc pas considérée. Néanmoins, cette étude numérique offre l'intérêt de simuler des cas d'écoulements caractérisés par des nombres de Grashoff importants et tient compte, par conséquent, de l'importance locale de l'inertie au voisinage des fronts. Sur les figures 17a et 17b, sont représentés à gauche ou à droite, respectivement, les isothermes ou les isovaleurs de la fonction de courant de l'écoulement simulé pour deux nombres de Rayleigh : l'un élevé (figure 17a) et l'autre, modéré (figure 17b). Si nous considérons que l'évolution de la différence de potentiel électrique $\Delta\Phi$ est entièrement imputable à la composante axiale U du champ de vitesse, alors l'accord entre l'étude numérique de Khalili *et al* [1994] et la distribution expérimentale, $\Delta\Phi = f(X)$, est qualitativement remarquable. A nombres de Rayleigh élevés, le rôle localement important (au voisinage des extrémités) de l'inertie est clairement établi par un resserrement des lignes isovaleurs de la fonction de courant. Ce resserrement suivant Z , implique une composante axiale de vitesse de module plus grand en haut et en bas, respectivement, de l'extrémité chaude et froide de la cavité. Notons en outre, pour le cas de cet écoulement en régime thermique III (cœur stratifié) que le gradient axial de température dans le cœur est très faible.

A nombres de Rayleigh modérés, la distribution de température contrôle l'évolution de la composante axiale U du champ de vitesse. De manière semblable aux observations conduites sur l'expérience, le maximum de U se trouve en haut et en bas des sections localisées, respectivement, au voisinage des extrémités froide et chaude. L'interprétation de cette phénoménologie à partir des isothermes reste encore valable : le gradient axial de température est également maximum dans ces régions de la cavité carrée. Il n'en demeure pas moins que le rôle de l'inertie est encore décelable pour un nombre de Hartmann égal à 50, si l'on en juge par la

présence d'un léger resserrement suivant Z des lignes isovaleurs de la fonction de courant au voisinage de l'extrémité chaude. Cette dernière observation est également en accord avec les observations formulées sur l'évolution axiale de la différence de potentiel électrique $\Delta\Phi$, mesurée pour un nombre de Hartmann $Ha = 107$. Bien que le maximum de $\Delta\Phi$ soit détecté au voisinage du front froid dans la partie supérieure de la cavité, une contribution de l'inertie, que l'on peut qualifier de rémanente, conduit à une augmentation locale de $\Delta\Phi$, faible mais néanmoins présente, au voisinage de l'extrémité chaude dans la partie supérieure de la cellule. Cette contribution de l'inertie, très localisée, s'affaiblit en même temps que le nombre de Rayleigh diminue sans totalement disparaître pour la gamme des nombres de Hartmann disponibles sur l'expérience MASCOT.

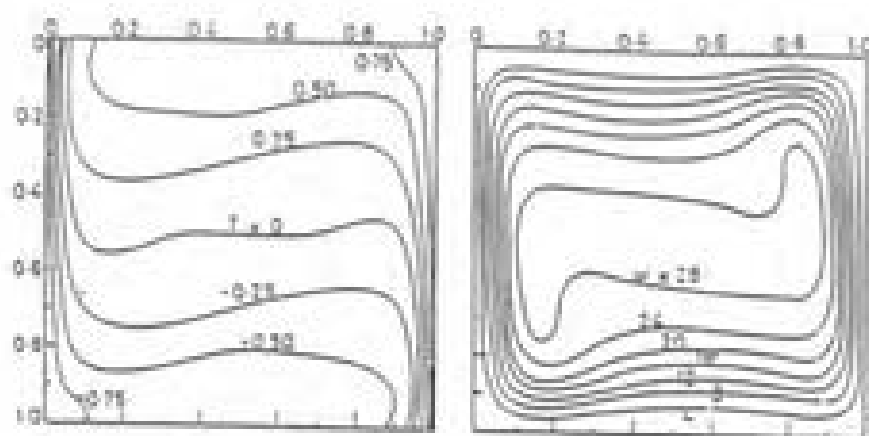


Figure 17a. Isothermes et lignes de courant ($Gr_{\Delta T} = 2.5 \cdot 10^5$, $Ha = 5$)
(d'après Khalili et al [1994])

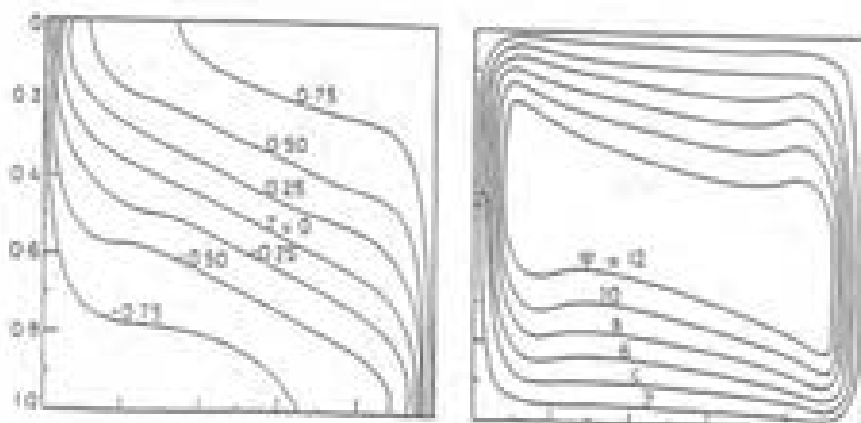


Figure 17b. Isothermes et lignes de courant ($Gr_G = 1.56 \cdot 10^5$, $Ha = 50$)
(d'après Khalili et al [1994])

4. Transferts de chaleur

L'estimation des transferts de chaleur dans le contexte de la croissance cristalline ne constitue pas un objectif primordial. Le spécialiste en solidification est davantage attaché à connaître précisément le champ de vitesse dans la phase liquide dopée de la croissance d'un monocristal semi-conducteur afin de prédire les transferts de masse : cette phase liquide est le plus souvent caractérisée par un nombre de Schmidt très grand devant l'unité. L'intérêt de déterminer un nombre de Nusselt pour les écoulements thermogravitaires MHD en cavités fermées concerne davantage le domaine de la fusion thermonucléaire. En effet, la couverture du réacteur de fusion thermonucléaire est proche (dans le cadre de l'un des projets européens) d'une enceinte fermée, remplie d'un métal liquide caloporteur (lithium-plomb) dont le rôle est double :

1. absorber le rayonnement neutronique du coeur de fusion et transporter la chaleur ainsi dégagée vers la circulation primaire d'eau,
2. régénérer du tritium et l'évacuer par un faible débit d'eau sans que celui-ci ne diffuse vers le circuit d'eau.

Dans ce concept, le coeur de fusion est constitué d'un plasma chaud, confiné par un champ magnétique intense. Le métal liquide contenu dans la couverture, chauffé dans son volume et refroidi aux frontières, fait l'objet d'un écoulement de convection naturelle sur lequel vient s'appliquer également ce champ magnétique intense. L'intérêt de bien connaître les échanges de chaleur dans le cadre de cet écoulement thermogravitaire MHD particulier devient évident.

Cette partie est destinée à l'étude globale de l'écoulement MHD de convection naturelle au sein de la cellule élanée de MASCOT. Cette étude se concrétise par l'évaluation du nombre de Nusselt à partir de mesures directes de températures aux extrémités de la cellule (mesure du nombre de Nusselt Nu_1) et, indépendamment, à partir des mesures pariétales de températures réalisées dans le coeur de la cellule (mesure du nombre de Nusselt Nu_2). Nous montrons que ces deux mesures, distinctes, sont en accord. Puis nous appliquons les résultats issus de l'étude analytique de Cowley [1994] à la détermination d'un nombre de Nusselt théorique Nu . Pour des nombres de Rayleigh modifiés suffisamment modérés : $Ra_G < 5$, le nombre de Nusselt Nu , prédit de cette manière, rend bien compte de la réalité expérimentale.

L'évaluation directe du nombre de Nusselt Nu_1 , à partir de mesures de températures réalisées dans l'eau de régulation des deux fronts de la cellule, est présentée au chapitre II. Nous concentrons cet exposé sur l'évaluation des nombres de Nusselt Nu_2 et Nu . Dans les deux cas, nous nous basons sur la conservation du flux de chaleur total Φ_{tot} , traversant le domaine fluide du front chaud vers le front froid. L'expression du flux total Φ_{tot} est obtenue par la double intégrale suivante dans toute section de la cavité cylindrique :

$$\Phi_{\text{tot}} = \iint_S (-\lambda \nabla T + \rho C_p \mathbf{u} T) \cdot d\mathbf{S}.$$

Les notations λ , ρ , C_p et \mathbf{u} désignent, respectivement, la conductivité thermique du mercure, sa densité, sa chaleur masique à pression constante et le champ de vitesse total. Dans la section centrale de la cellule, le flux total de chaleur fait donc intervenir :

1. le gradient axial de température G ,
2. la distribution de température autour de la section.

Les approximations polynomiales adoptées sur l'ensemble de la section pour la température et le champ de vitesse, sont tirées des expressions analytiques de Cowley [1994]. Par suite, si le nombre de Hartmann est très grand devant l'unité, ces approximations s'identifient avec la solution analytique exacte de Cowley. Les champs de température et de vitesse s'écrivent selon les relations suivantes :

$$T = T_1 + \Delta_s T_1 + G^* X + (\delta\theta/4) * \{ (z/R_0) * [3 - (y/R_0)^2 - (z/R_0)^2] \},$$

et

$$U = U X = -2 \alpha \delta\theta z / (G R_0^3) X.$$

Le calcul de l'intégrale précédente mené sur la section centrale délivre l'expression suivante pour le nombre de Nusselt :

$$G/G_0 * \{ 1 + 7/24 * (\delta\theta / G R_0)^2 \}.$$

4.1. Evaluation du nombre de Nusselt Nu_2

Nous considérons que le nombre de Nusselt Nu_2 est déterminé expérimentalement dans la mesure où $\delta\theta$ est l'amplitude mesurée de la distribution de température autour du cercle central :

$$\delta\theta = T_{X=200}(\alpha=90^\circ) - T_{X=200}(\alpha=270^\circ).$$

4.2. Evaluation du nombre de Nusselt Nu

Le nombre de Nusselt théorique Nu est calculé en considérant que l'amplitude $\delta\theta$ est égale au nombre de Rayleigh modifié Ra_G , et que le nombre de Hartmann est très grand devant l'unité :

$$Nu = G/G_0 * \{ 1 + 7/24 * Ra_G^2 \}. \quad (\text{III.7})$$

Cette expression du nombre de Nusselt prend donc en compte la distribution de température et de vitesse dans le cœur modélisée analytiquement par Cowley [1994].

4.3. Evolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh modifié Ra_G

Nous représentons sur la figure 18, l'évolution des trois nombres de Nusselt Nu_1 , Nu_2 , Nu pour un écart de température ΔT égal à 14.7 K. L'accord entre les deux nombres de Nusselt : Nu_1 et Nu_2 , suggère une certaine fiabilité dans leur évaluation. On peut donc affirmer que si le nombre de Rayleigh modifié est voisin de l'unité, ou inférieur, alors l'expression théorique du nombre de Nusselt (équation III.7) se révèle être un pronostic analytique adapté. Pour cette gamme du nombre de Rayleigh modifié ($Ra_G < 1$), le gradient axial de température G est confondu avec sa valeur asymptotique $G_\infty (= \Delta T / L)$. En conséquence, pour de grands nombres de Hartmann, le nombre de Nusselt suit la loi d'échelle suivante :

$$Nu \sim Ra_G^2.$$

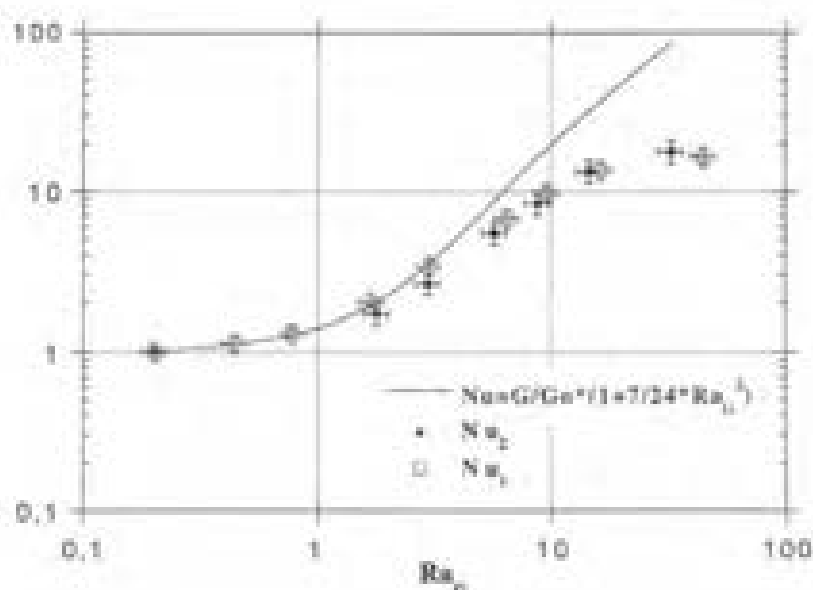


Figure 18. Transferts de chaleur dans la cellule MASCOT :
mesure du nombre de Nusselt.

En revanche, cette loi n'est plus valable dès lors que les couches de Hartmann ne sont plus électriquement inactives. En particulier, si une faible non-uniformité du champ magnétique b est introduite, de l'ordre de ϵ fois l'intensité de la partie uniforme du champ magnétique B_0 (chapitre I), alors les couches de Hartmann deviennent électriquement actives pour la perturbation de densité de courant électrique résultante. Dans ce cas, on peut prévoir que la loi guidant le nombre de Nusselt est ainsi modifiée :

$$Nu \sim (Ra_G [1 + \epsilon Ha])^2.$$

5. Conclusion

L'étude expérimentale d'un écoulement laminaire de convection naturelle MHD dans une cavité horizontale élancée est proposée dans ce chapitre. L'investigation expérimentale s'appuie sur la cellule cylindrique d'élanement ϵ (≈ 0.05), ainsi que sur l'instrumentation à la fois locale et globale disponibles sur l'expérience MASCOT (chapitre II).

Pour cette configuration G-H particulière, nos mesures de potentiel électrique mettent clairement en évidence le fait que **les couches de Hartmann demeurent électriquement inactives** sur l'ensemble de la cavité. Par conséquent, les densités de courant électriques transversales ou axiales, induites dans le cœur de l'écoulement ou dans les régions d'extrémités, n'ont nul besoin des couches de Hartmann pour se refermer. L'étude de la transition d'un régime de couches limites (régime thermique III) vers un régime de cœur (régime thermique II) est de ce fait simplifiée.

Le régime de couches limites se caractérise par une déformation des distributions de température pariétales autour de cercles répartis le long de la cellule. Cette déformation est imputable à une divergence des lignes de courant au voisinage de la paroi longitudinale dans la couche limite thermique. En effet, entre le cœur stratifié et la couche limite thermique se crée un échange de fluide (pompé par la couche limite thermique puis rejeté dans le cœur) qui s'illustre par un champ de vitesse secondaire dans la section transversale. L'importance localisée de l'inertie pour ce régime thermique III se manifeste par la présence d'un *extremum* sur la distribution de potentiel électrique, au voisinage de l'extrémité chaude, dans la partie supérieure du cylindre.

Puis la transition vers un régime de cœur est étudiée. Cette transition est mise en évidence par une exacte inversion de la déformation centro-symétrique sur les distributions de température autour des cercles localisés au voisinage des fronts de la cellule. Ce phénomène est expliqué par une augmentation de l'épaisseur des couches limites thermiques joignant les deux extrémités. Le développement de ces couches limites entraîne une variation des dérivées axiales de la température près des fronts. Le gradient de température axial est, de fait, plus important en haut ou en bas de la cavité cylindrique, respectivement, du côté froid ou chaud. Cette asymétrie se voit confirmée par le déplacement de l'*extremum* de potentiel électrique vers l'extrémité froide dans la moitié supérieure de la cellule. Cette interprétation qualitative est en outre validée par une analyse des ordres de grandeur.

Pour toute valeur du nombre de Rayleigh modifié Ra_0 inférieure à 0.1, un régime de cœur est diagnostiqué *via* les lois d'échelles suivantes portant sur l'écart de température

adimensionné, la composante axiale du champ de vitesse adimensionné, ainsi que le nombre de Nusselt :

$$\bar{\theta} \sim Ra_G,$$

$$U \sim Ha^{-2},$$

$$Nu \sim Ra_G^3.$$

Finalement, si le nombre de Rayleigh Ra_{dT} est adapté à l'étude d'un régime de couches limites, la pertinence du nombre de Rayleigh modifié Ra_G , s'impose lors de l'étude de la transition d'un régime de couches limites vers un régime de coeur.

CHAPITRE IV

Simulation numérique 3-D de l'écoulement thermogravitaire MHD dans une cavité horizontale faiblement élançée

La simulation numérique 3-D d'un écoulement thermogravitaire MHD stationnaire dans une configuration G-H cylindrique est présentée. L'élançement horizontal ε du cylindre ainsi que le nombre de Prandtl Pr , impliqués dans cette simulation, sont modérés : $\varepsilon = Pr = 0.25$. Le nombre de Grashoff et le nombre de Hartmann atteignent respectivement les valeurs $Gr_{AT} = 3410$ et $Ha = 50.3$. Cette étude numérique est réalisée après modification du code aux éléments finis POLY3D™ et tient compte du potentiel électrique. Le modèle mathématique adopté repose sur les équations de Navier-Stokes, de l'énergie et du potentiel électrique. Du point de vue numérique, la résolution des équations de Navier-Stokes est obtenue par l'algorithme d'Uzawa incomplet préconditionné. Le maillage fait intervenir des éléments de Crouzeix-Raviart tétraédriques $P_2^*-P_1$ pour les champs de vitesse et de pression. L'écoulement obtenu se révèle fortement tridimensionnel. Sa géométrie, relativement complexe, est interprétée à partir de l'analyse des distributions de température et du potentiel électrique. A nombres de Rayleigh modifiés Ra_0 , même modérés, le rôle crucial des couches limites thermiques et du circuit électrique aux extrémités dans le contrôle de l'écoulement est mis en évidence.

1. Introduction

Quelques études numériques d'écoulements thermogravitaires MHD sont disponibles dans la littérature. Ozoe and Maruo [1987] étudient le cas particulier d'une configuration G-H bidimensionnelle, en forme de carré, soumise à un champ magnétique uniforme et vertical. Le fluide considéré est de faible nombre de Prandtl. Les couches de Hartmann sont, à juste titre, prises en compte dans cette étude bidimensionnelle (cf. chapitre I). Le modèle mathématique résolu fait intervenir une formulation du problème MHD basée sur le faible champ magnétique induit b . Une telle formulation est accompagnée de deux inconvénients majeurs :

1. le nombre de Prandtl magnétique doit être suffisamment important pour permettre la convergence numérique du modèle mathématique,
2. les conditions aux limites portant sur b sont discutables dans le contexte de cette étude.

Le nombre de Prandtl magnétique Pr_m , est pris égal à l'unité par les auteurs. Ce choix s'éloigne de la réalité des métaux liquides caractérisés par $Pr_m \ll 1$.

La même configuration G-H (en forme de carré) est étudiée par Khalili *et al* [1994]. Cette fois, bien que le nombre de Prandtl choisi soit celui de l'air, la petitesse du nombre de Prandtl magnétique Pr_m est effectivement prise en compte. Le modèle mathématique, résolu

numériquement, repose sur une discrétisation aux différences finies des équations de Navier-Stokes et de l'équation de l'énergie. La force de Laplace se résume en une force de freinage. L'intérêt de cette étude numérique, par rapport au pronostic analytique de Garandet *et al* [1992], réside dans le fait que le régime thermique III (régime de couches limites) est simulé. Khalili *et al* [1994] simulent numériquement des régimes thermiques III allant d'un état fortement convectif ($Gr_G = 2.5 \cdot 10^5$ et $Ha = 5$) à un état convectif à nombre de Hartmann élevé ($Gr_{AT} = 1.56 \cdot 10^5$ et $Ha = 50$). Ces études demeurent bidimensionnelles.

La distribution du potentiel électrique est prise en compte dans les études tridimensionnelles d'Ozoe and Okada [1989] (configuration G-H cubique) et de Ben Hadid *et al* [1994] (configuration G-H parallélépipédique). Ces études ont été présentées au chapitre I. Elles confirment en particulier les lois d'échelles en $1/Ha^2$, ou $1/Ha$, portant sur le champ de vitesse axial dans le coeur, prédites par la théorie analytique d'Alboussière *et al* [1994].

Plus proche de la réalité d'une croissance cristalline, la configuration G-H de section circulaire à élanement horizontal modéré est étudiée numériquement par Ben Hadid *et al* [1996]. Les résultats obtenus par ces auteurs s'accordent avec les résultats obtenus sur l'expérience MASCOT.

La simulation numérique présentée dans ce chapitre étudie également le cas d'une configuration G-H cylindrique, d'élanement horizontal modéré, mais pour des nombres de Rayleigh modifié et de Hartmann modérés. L'ambition de cette étude numérique basée sur la méthode des éléments finis n'est pas de parvenir à un pronostic quantitatif précis. Ce travail, essentiel, est déjà réalisé par Ben Hadid *et al* [1996] avec des méthodes numériques spécifiquement adaptées, basées sur des méthodes spectrales. Ces auteurs confirment numériquement les lois d'échelles prédites par des développements analytiques (Alboussière *et al* [1993]) et validées expérimentalement. Notre objectif est de proposer une interprétation physique de l'écoulement simulé, caractéristique d'un régime thermique III faiblement convectif. Cette interprétation est conduite d'une part, avec le support de la théorie analytique de Cowley [1994] et d'autre part, à l'aide d'une analyse des distributions de température et du potentiel électrique (Davoast *et al* [1996-bis]). Avant cela, les modifications réalisées sur le code POLY3D™ ainsi que le modèle mathématique résolu sont présentés. Le choix des méthodes numériques et des éléments finis est justifié. Les figures 4 à 9 sont rassemblées à la fin du chapitre.

2. Configuration G-H étudiée, formulation mathématique

Comme pour l'expérience MASCOT, on envisage le cas d'une cavité cylindrique de section circulaire. Les notations adoptées au chapitre I sont reprises. Un écart de température ΔT est imposé entre les deux extrémités, et la paroi longitudinale de la cavité est adiabatique. Les ressources informatiques à disposition ne permettent pas de dépasser l'élanement horizontal $\varepsilon = R_0/L = 0.25$. Le fluide simulé est conducteur de l'électricité, incompressible, et caractérisé par un nombre de Prandtl $Pr = 0.25$. Cette valeur de Pr peut paraître singulièrement supérieure aux valeurs typiques des métaux liquides. Néanmoins, cette étude apporte une confirmation du pronostic de Cowley en confirmant la pertinence du nombre de Rayleigh modifié Ra_G . La totalité du domaine fluide est soumise à un champ magnétique uniforme vertical B_0 . Du point de vue électrique, les parois sont considérées comme parfaitement isolantes. Cette description correspond à la configuration G-H schématisée sur la figure 1.

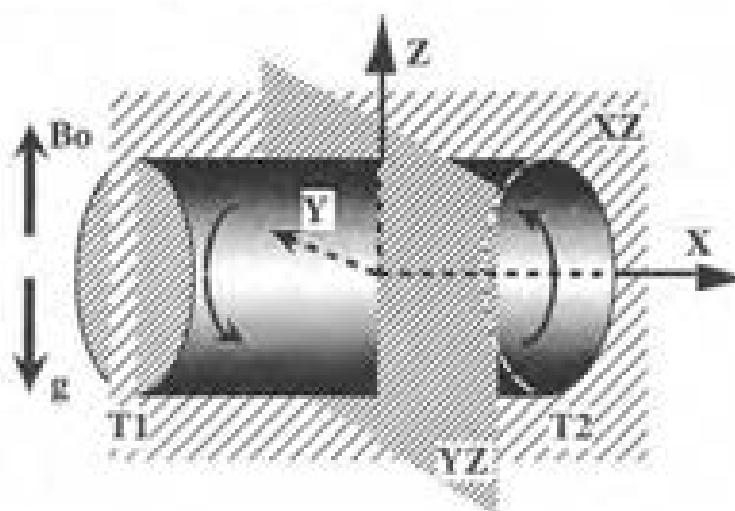


Figure 1. Géométrie de la configuration G-H étudiée.

Le modèle mathématique choisi pour simuler cet écoulement thermogravitaire MHD repose sur une formulation vitesse-pression-température-potentiel électrique, respectivement notée : $\{u, P, T, \varphi\}$. Par rapport aux formulations basées sur la densité de courant électrique J , ou sur le champ magnétique induit b , le choix d'un scalaire comme le potentiel électrique présente l'avantage de minimiser l'espace mémoire requis. En outre, contrairement au champ magnétique induit b , l'imposition des conditions aux limites électriques sur φ (condition de Neuman) ne présente pas d'ambiguïté. La formulation $\{u, P, T, \varphi\}$ se ramène aux équations de Navier-Stokes (quantité de mouvement et incompressibilité), aux équations de l'énergie et du potentiel électrique. Cette dernière équation est obtenue par application de l'opérateur rotationnel à la loi d'Ohm et tient compte de la conservation de la densité de courant électrique. La formulation obtenue débouche sur un système fermé excepté pour le potentiel électrique défini à

une constante près. Seules les dérivées spatiales du potentiel électrique (variable conservative) jouent un rôle dans la physique de ce problème. Par ailleurs, l'enveloppe délimitant le domaine fluide Ω , est supposée électriquement isolante. Par suite, le problème n'est pas modifié si la charge électrique totale du volume est imposée égale à zéro. Cette condition non restrictive :

ferme le système d'équations à résoudre,

et permet la convergence du potentiel électrique.

L'algorithme de résolution impliqué dans la détermination du potentiel électrique est itératif. Dans l'approximation de Boussinesq, le système d'équations modélisant le problème MHD s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} (\mathbf{u}, \nabla) \mathbf{u} = \frac{-1}{\rho} \nabla P - g\beta(T - T_1) + \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{\sigma B_0}{\rho} \begin{bmatrix} -\left(U B_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \\ -V B_0 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.1})$$

$$B_0 (\nabla \times \mathbf{u}) = \Delta \varphi, \quad (\text{IV.2})$$

$$\int_{\Omega} \varphi \, d\Omega = 0, \quad (\text{IV.3})$$

$$(\mathbf{u}, \nabla) T = \alpha \Delta T. \quad (\text{IV.4})$$

L'adimensionnement de ce système fait intervenir l'équilibre entre les deux couples associés à la force de flottabilité et la force de Laplace. De cet équilibre, l'ordre de grandeur du champ de vitesse $\frac{\nu}{R_0} \frac{Gr_G}{Ha^2}$, est déduit. En conséquence, les nombres de Grashoff et de Rayleigh modifiés, Gr_G et Ra_G , introduits par Cowley [1994], apparaissent de nouveau. Les champs de vitesse, de pression, de température et de potentiel électrique adimensionnés, respectivement notés, U , P , T , Φ , sont donc obtenus par les quatre changements de variables suivants :

$$\mathbf{u} \longrightarrow U * \frac{\nu}{R_0} \frac{Gr_G}{Ha^2},$$

$$p \longrightarrow P * \rho \left(\frac{\nu}{R_0} \frac{Gr_G}{Ha^2} \right)^2,$$

$$T - T_i \longrightarrow \theta^* G R_G ,$$

$$\varphi \longrightarrow \phi^* u B_0 \frac{Gr_G}{Ha^2} ,$$

$$(g, B_0) \longrightarrow (-k, k)^* (g, B_0) .$$

Le système, image du précédent après adimensionnement, s'exprime par les équations (IV.1-bis) à (IV.4-bis) ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{Gr_G}{Ha^2} (U, \nabla) U = \frac{-Gr_G}{Ha^2} \nabla P + \theta k + \frac{1}{Ha^2} \Delta u + \begin{bmatrix} -\left(U + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \\ -V + \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \nabla \cdot U = 0 \end{array} \right. , \quad (IV.1-bis)$$

$$k \cdot (\nabla \times U) = \Delta \phi , \quad (IV.2-bis)$$

$$\int_{\Omega} \phi \, d\Omega = 0 , \quad (IV.3-bis)$$

$$Ra_G (U, \nabla) \theta = \Delta \theta . \quad (IV.4-bis)$$

Les résultats issus de nos simulations numériques, présentés et commentés dans ce chapitre, respectent cette adimensionnement. Si les groupements (Gr_G/Ha^2) et $(1/Ha^2)$ sont suffisamment petits devant l'unité, les termes inertiels et le frottement visqueux ne sont pas à considérer dans le bilan des forces réalisé sur le coeur MHD de l'écoulement. Si de plus le nombre de Rayleigh modifié Ra_G , est suffisamment petit devant l'unité, un rapprochement direct de la solution numérique obtenue avec le pronostic analytique de Cowley [1994] est possible.

3. Méthodes numériques et maillage

Nous présentons les raisons qui justifient le choix du logiciel POLY3D™. Celles-ci sont principalement liées aux choix des méthodes numériques et des éléments finis particulièrement optimisés pour traiter ces simulations numériques d'écoulements 3-D coûteuses en espace mémoire. On expose le principe de l'algorithme d'Uzawa incomplet (Robichaud *et al* [1990]) utile lors de la résolution des équations de Navier-Stokes ainsi que les solutions développées pour obtenir une solution convergée.

3.1. Problème numérique

Le schéma global de résolution observé dans nos simulations est le suivant :

1. initialisation des champs de vitesse, de pression et du potentiel électrique,
2. résolution de l'équation de l'énergie : détermination du champ de température,
3. résolution des équations de Navier-Stokes par l'algorithme d'Uzawa incomplet préconditionné et détermination des champs de vitesse et de pression,
4. résolution de l'équation du potentiel électrique et détermination du potentiel électrique,
5. retour à l'étape 2 jusqu'à la convergence du champ de vitesse.

La résolution des équations de l'énergie et du potentiel électrique se fait par une formulation faible classique de type Galerkin. Les équations sont traitées comme des équations elliptiques dont le terme source est connu grâce à l'itération précédente. L'algorithme utilisé pour la résolution des équations de Navier-Stokes mérite en revanche une présentation plus détaillée. Le principal intérêt du code POLY3D™ est de mettre à disposition un algorithme robuste pour la détermination conjointe des champs de vitesse et de pression : l'algorithme d'Uzawa incomplet préconditionné. Cet algorithme, confidentiel, est une version améliorée de l'algorithme d'Uzawa incomplet. Ce dernier s'inspire de l'algorithme itératif d'Uzawa (Fortin et Glowinski [1982]) auquel Robichaud *et al* [1990] ont apporté des modifications. Nous en exposerons le principe ultérieurement.

Le calcul de la température et du potentiel est basé sur l'élément tétraédrique linéaire P1 (4 noeuds à chaque sommet). En revanche, en raison de l'incidence du choix des bases d'approximations polynomiales sur la convergence du calcul des champs de pression et de vitesse, ainsi que sur le temps d'exécution des calculs, le choix de l'élément 3-D pour l'approximation de l'écoulement est plus délicat.

3.2. Rappels sur la méthode des éléments finis (MEF) appliquée à l'étude des écoulements

L'application de la méthode des éléments finis à la simulation des écoulements exige quelques précautions incontournables. On ne peut pas, *a priori*, relier toute approximation du champ de vitesse à toute approximation du champ de pression. Afin de préserver une fiabilité satisfaisante sur le calcul de la pression, Brezzi [1974] montre qu'il faut remplir une condition de compatibilité entre les deux espaces d'approximation pour la vitesse et la pression. Dans le cas contraire, des oscillations numériques parasites apparaissent sur le champ de pression nécessitant un traitement numérique après calculs (traitement développé par la NASA). On choisira donc un élément qui respecte cette condition de compatibilité dite, condition de Brezzi-Babuska. En pratique, pour les problèmes d'écoulements, il existe deux catégories d'éléments selon l'approximation pour la pression qui leur est associée :

1. approximation par des polynômes continus par morceaux,
2. approximation par pressions discontinues propres à chaque élément.

Pelletier *et al* [1989] montrent que même pour des écoulements classiques, une attention particulière doit être portée aux choix de l'approximation pour la pression et de l'algorithme de résolution pour le module fluide (résolution des équations de Navier-Stokes). Le rôle de la pression est d'autant plus important qu'elle remplit deux exigences :

1. équilibrer les termes sources : l'inertie, la flottabilité et la force de Laplace,
2. permettre le respect de la condition de continuité du fluide.

Si ces exigences ne sont pas remplies, Pelletier *et al* mettent en évidence, par des simulations de certains écoulements isothermes réalisées avec des algorithmes standards (méthodes de pénalisation), le fait que la conservation de la masse n'est pas garantie. Notons V_h et Q_h , les espaces vectoriels correspondant aux approximations pour la vitesse et la pression. La condition d'incompressibilité du fluide s'écrit sous sa forme faible :

$$\forall U_h \in V_h, \forall q_h \in Q_h, \int_{\Omega} q_h \cdot \nabla U_h \, d\Omega = 0. \quad (IV.5)$$

Si en particulier, sur l'espace Q_h , l'approximation pour la pression est une distribution de Dirac, alors sur chaque élément Ω_i , la pression est constante et l'expression (IV.5) s'écrit :

$$\int_{\Omega_i} \nabla U_h \, d\Omega_i.$$

L'écoulement est donc automatiquement incompressible sur chaque élément et non pas seulement de façon globale comme c'est le cas pour une approximation par des pressions continues sur le maillage.

Dans les équations de Navier-Stokes, le terme de pression peut avoir un poids très faible devant les autres termes. Suivant le type d'algorithme utilisé, il en résulte des erreurs d'arrondis qui s'accumulent ainsi qu'un mauvais conditionnement de la matrice associée au terme elliptique des équations. En conséquence, la condition d'incompressibilité n'est également pas respectée. Afin de pallier cette difficulté, Pelletier *et al* [1989] montrent que l'algorithme d'Uzawa est une solution. En effet, cet algorithme fait naturellement intervenir la condition d'incompressibilité du fluide. Finalement, dans le cadre du problème étudié, à savoir, un écoulement MHD thermogravitaire incompressible, l'utilisation de pressions discontinues et de l'algorithme d'Uzawa est recommandée.

3.3. Algorithmes

3.3.1. Algorithme d'Uzawa

Sous forme matricielle, la formulation faible des équations de Navier-Stokes s'écrit schématiquement :

$$A:U + C(U):U + B^T.P = F, \quad (\text{Q.D.M.})$$

$$B:U = 0. \quad (\text{incompressibilité})$$

La notation " T ", désigne la transposée, les symboles U et P représentent les degrés de liberté en vitesse et en pression et les symboles A , $C(U)$ et B , signifient, respectivement, les matrices de diffusion visqueuse, de convection et de divergence. Le symbole F représente le vecteur source contenant la force de flottabilité ainsi que la force de Laplace. Une première démarche consisterait à résoudre ce système de deux équations par itérations successives, mais des problèmes de conditionnement et de non-respect de la condition d'incompressibilité se poseraient en retour. Pour ces raisons, le schéma d'Uzawa suivant est conseillé :

1. $n=0$ initialisation de P_0 et U_0 .
2. $n \geq 1$ par la méthode du point fixe (ou de Picard), résolution du système :

$$[A + 1/\epsilon B^T B] U^{n+1} = - C(U^n):U^n - B^T P^n + F, \quad (\text{IV.6})$$

3. $n \geq 1$ correction de la pression par la résolution du système :

$$P^{n+1} = P^n + 1/\epsilon B U^n,$$

4. retour à l'étape 2 jusqu'à ce que la pression ait convergé, donc que la contrainte d'incompressibilité soit respectée.

Dans l'étape 2, qui représente le problème primal, le terme $1/\epsilon B^T B$ est similaire à un terme de pénalité. En effet, sans la mise à jour de la pression à l'étape 3, appelée problème dual, on retrouve un algorithme de pénalisation standard où la pression est directement reliée à la divergence du champ de vitesse par l'expression : $P^{n+1} = 1/\epsilon B U^n$. Cette pénalisation permet d'accélérer la convergence (Fortin et Glowinski [1982]). Plus ϵ est petit, plus la convergence est rapide mais plus le conditionnement de la matrice $[A + 1/\epsilon B^T B]$ se dégrade. Un compromis satisfaisant consiste à choisir ϵ égal à 10^{-6} . On vérifie en outre que l'algorithme n'a convergé que si $B U^n$ est petit, autrement dit, si la contrainte d'incompressibilité est vérifiée. Le caractère itératif de cet algorithme permet de prendre en compte les termes non-linéaires dans les équations de Navier-Stokes : ils sont alors implantés dans le terme source du système (IV.6) noté F . L'algorithme d'Uzawa incomplet (Robichaud *et al* [1990]) est une variante améliorée de l'algorithme d'Uzawa et s'inspire directement de l'algorithme d'Arrow-Hurwicz auquel s'ajoutent les modifications apportées par Aboulaich *et al* [1986]. Là encore nous nous cantonnons à une présentation rapide de l'algorithme résultant de ces modifications : l'algorithme d'Arrow-Hurwicz modifié.

3.3.2. Algorithme d'Arrow-Hurwicz modifié

Cet algorithme peut être vu comme une version itérative de l'algorithme d'Uzawa avec l'utilisation d'un pas fractionnaire dans le problème primal où, cette fois, on évalue la vitesse $U^{n+1/2}$. Désignons par A_ϵ , la matrice $[A + 1/\epsilon B^T B]$. Le problème primal consiste à résoudre par la méthode du gradient conjugué, le système suivant :

$$S_\epsilon^{-1} A_\epsilon U^{n+1/2} = S_\epsilon^{-1} [F - B^T P^n - C(U^n; U^n)],$$

où S_ϵ est une matrice de préconditionnement dont le but est d'améliorer le conditionnement du système (IV.6). La seconde étape de cet algorithme consiste à résoudre le problème dual par une méthode de descente optimale, introduite par Aboulaich *et al* [1986]. Cette méthode numérique poursuit le même objectif que l'algorithme d'Uzawa, c'est à dire, la minimisation de la divergence du champ de vitesse.

La présentation des deux algorithmes précédents permet dorénavant de mieux appréhender la présentation du principe de l'algorithme d'Uzawa incomplet.

3.3.3. Algorithme d'Uzawa incomplet

Cet algorithme est une amélioration des algorithmes précédents afin de traiter les problèmes de taille importante (tridimensionnels par excellence). Comme pour l'algorithme d'Uzawa, il consiste en une résolution itérative du problème primal suivie de la projection du champ de vitesse, à chaque itération, dans un espace à divergence nulle (problème dual). Pour la résolution du problème primal, il fait appel à une méthode de gradient conjugué : on détermine à partir du champ de vitesse U^n initial, un champ de vitesse intermédiaire U_{n+1} , par analogie avec l'algorithme d'Arrow-Hurwicz. Pour la résolution du problème dual, la convergence est accélérée grâce à l'utilisation de la méthode du gradient conjugué et du préconditionneur S_E^{-1} . Avec le champ U_{n+1} , pour donnée initiale, on peut calculer la pression P^n , et la vitesse U^{n+1} . Pour ce calcul, plutôt que d'utiliser le préconditionneur A_E^{-1} , on a donc recours simplement au préconditionneur S_E^{-1} , calculé au moyen d'une factorisation incomplète de A_E . Dans cet algorithme, la différence essentielle avec l'algorithme d'Arrow-Hurwicz réside dans la résolution du problème dual où cette fois, une méthode itérative est adoptée. Les itérations sont prolongées tant que le champ de vitesse U^{n+1} n'est pas projeté dans un espace à divergence nulle (à la précision près, demandée par l'utilisateur). Testé pour de nombreux cas d'écoulements avec le code POLY3D™, l'algorithme d'Uzawa incomplet s'avère robuste. Pour des précisions plus techniques, le lecteur peut se référer aux travaux de Robichaud [1991].

3.4. Maillage

Les simulations présentées dans ce chapitre, tridimensionnelles, comportent inévitablement un grand nombre de degrés de liberté. L'élément d'approximation doit en outre respecter la condition de Brezzi-Babuska. On se base sur une approximation discontinue de la pression. Cette dernière ne doit donc être définie qu'à l'intérieur de l'élément. Bertrand et al [1992] montrent que l'élément $P_1^*-P_0$, obtenu en ajoutant trois degrés de liberté pour la vitesse au centre de gravité des quatre faces d'un tétraèdre P_1-P_0 (élément minimum classique) remplit ces conditions. En définitive, l'élément $P_1^*-P_0$, tétraédrique (figure 2), fournit l'alternative en terme de précision et de temps d'utilisation CPU. Pour ces raisons, nos premières simulations ont débuté avec cet élément pour la détermination des champs de vitesse et de pression.

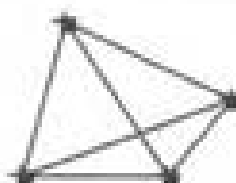
Élément $P_1^+ - P_0$



8 * 3 degrés de liberté
pour la vitesse



1 degré de liberté pour la pression
au barycentre de l'élément.



4 degrés de liberté pour la
température et le potentiel électrique

Figure 2. Élément linéaire $P_1^+ - P_0$ initialement choisi pour les premières simulations numériques.

Pour des simulations réalisées avec l'élément tétraédrique $P_1^+ - P_0$ avec une géométrie cylindrique, la présence de la symétrie centrale caractéristique de l'écoulement en configuration G-H est dépendante de deux facteurs :

1. la géométrie de la section,
2. la valeur du nombre de Hartmann.

La perte du caractère de symétrie centrale sur l'écoulement se caractérise par la délocalisation de la cellule de Hadley vers le front froid. Si, de plus, le nombre de Hartmann augmente, des oscillations numériques apparaissent de façon flagrante sur le champ de vitesse, quel que soit le raffinement du maillage, sur la totalité du volume fluide. Ce phénomène est observé pour 12208, 21720 ou même, 30575 éléments $P_1^+ - P_0$. Dans le même temps, le critère de convergence sur le champ de température et le champ de potentiel électrique affiche une erreur fluctuante, qui, globalement, diminue avec un nombre d'itérations de couplage croissant. Les champs scalaires T , P , ϕ , U , V , W , témoignent directement de ces oscillations numériques dans la mesure où leurs cartes isovaleurs semblent très peu physiques (contours chaotiques).

3.4.1. Écoulement dans une configuration G-H parallélépipédique

Si nous réalisons une simulation numérique avec les mêmes équations, les mêmes caractéristiques physiques et le même élanement, mais pour une configuration G-H parallélépipédique, les phénomènes indésirables évoqués précédemment disparaissent. Une explication possible d'un tel changement réside dans le fait que des éléments linéaires $P_1^+-P_0$ s'adaptent mieux à un contour polygonal plutôt qu'à un contour circulaire. Une autre explication possible vient du fait que pour cette configuration G-H parallélépipédique, l'écoulement est davantage caractérisé par une forte tendance à la bidimensionnalisation dans le plan XZ (Garandet *et al* [1992], Ben Hadid and Henry [1994]).

3.4.2. Choix d'un élément $P_2^+-P_1$ pour l'approximation des champs de vitesse et de pression

Cependant, notre objectif est de simuler l'écoulement dans la configuration G-H initiale de section circulaire. Afin de tenir compte de cette section, une solution consiste à adopter des éléments quadratiques pour le calcul des champs de vitesse et de pression, respectant en outre les conditions définies au paragraphe 3.2. L'élément tétraédrique 3-D de Crouzeix-Raviart $P_2^+-P_1$ (figure 3) est finalement choisi. Pour un maillage de 12208 éléments $P_2^+-P_1$, les oscillations numériques disparaissent. Le nombre d'équations à résoudre est important mais la symétrie centrale, caractéristique de l'écoulement, est retrouvée.

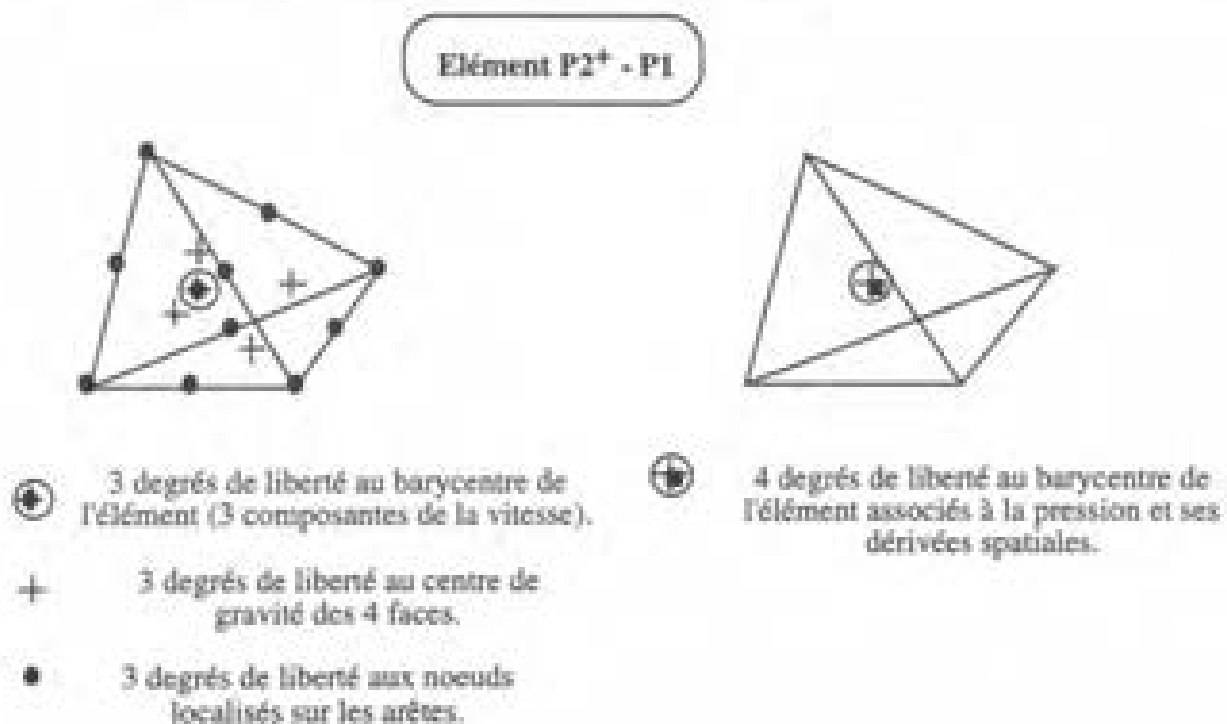


Figure 3. Élément de Crouzeix-Raviart 3-D $P_2^+-P_1$

En revanche, la convergence sur le champ de vitesse n'est plus possible avec l'algorithme d'Uzawa incomplet. Avec les éléments $P_2^*-P_1$, le conditionnement de la matrice elliptique dans le module fluide se dégrade. En effet, dans l'algorithme d'Uzawa incomplet, le préconditionneur S_E^{-1} , obtenu par une factorisation incomplète de A_E , permet de gagner du temps CPU mais peut introduire une erreur sur le calcul du champ de vitesse. Via les gradients du champ de vitesse, cette erreur est injectée dans le terme source de la forme faible de l'équation du potentiel et se retrouve *in fine* dans le calcul du potentiel électrique. Or les dérivées spatiales du potentiel électrique interviennent dans le terme source de la forme faible des équations de Navier-Stokes via la force de Laplace. Il en résulte que toute erreur numérique générée sur le champ de vitesse est susceptible de s'amplifier. La convergence dans le module fluide n'est obtenue qu'au prix d'un nouvel algorithme coûteux en temps CPU mais robuste. L'algorithme d'Uzawa incomplet préconditionné se distingue de l'algorithme d'Uzawa incomplet par le fait que les problèmes primal et dual sont tous deux résolus par méthodes itératives. Par ailleurs, la mise à jour du champ de vitesse et du champ de pression à partir de U_{n+1} et P_{n+1} , ne fait plus intervenir le préconditionneur S_E^{-1} , mais l'inverse exacte de la matrice A_E .

3.4.3. Sensibilité de la solution au maillage (réalisé sur IDEAS V.6 de SDRCTM)

En absence de champ magnétique, un minimum de 6099 éléments $P_2^*-P_1$ est nécessaire afin d'obtenir une solution invariante. En revanche, de nouvelles oscillations numériques sur le champ de vitesse, de nature différente des oscillations numériques précédentes, sont engendrées dans les couches de Hartmann si le nombre de Hartmann est suffisamment important. Une solution à ce problème consiste à mailler plus finement le volume sans dépasser les capacités informatiques. Si le nombre de Hartmann atteint 25.6, les oscillations numériques disparaissent avec un maillage régulier de 12208 éléments $P_2^*-P_1$. Si le nombre de Hartmann augmente jusqu'à 50.3, ces oscillations numériques sont à nouveau engendrées (à un faible niveau d'amplitude) et restent confinées à une enveloppe périphérique de contour externe, la paroi longitudinale du cylindre, et d'épaisseur approximativement égale à celle de la couche de Hartmann. Après un test réalisé sur un maillage moins raffiné (10111 éléments $P_2^*-P_1$), nous observons que ces oscillations n'influencent pas les résultats obtenus sur le potentiel et la température dans le cœur MHD. Nous expliquons ce phénomène par :

1. le fait que les couches de Hartmann ne sont pas électriquement actives,
2. le fait que le maillage soit suffisamment raffiné pour tenir compte des couches parallèles.

Néanmoins cette tendance de l'écoulement à provoquer l'apparition d'oscillations serait vraisemblablement enrayerée par un schéma de décentrage appliqué aux couches de Hartmann.

3.5. Critère de convergence et coût des simulations

Le critère pertinent de convergence du code est un test sur le champ de vitesse, réalisé pour chaque itération de couplage, à la fin de la première itération de point fixe dans le module fluide. Ce critère de convergence repose sur le calcul de l'erreur ϵ_{num} suivante :

$$\epsilon_{\text{num}} = \frac{|U^{n+1} - U^n|}{|U^n|}.$$

L'accès à des résultats licites se fait au prix de temps de calculs relativement longs. A titre d'exemple, une simulation numérique effectuée avec le maillage de 12208 éléments $P_2^+-P_1$, sur un IBM RISC/6000 model 590 130 MFLOPS LINPACK de mémoire centrale 256 MB exige les caractéristiques suivantes :

1. 56 heures de calculs avec 15 itérations de couplage (modules thermique - fluide - potentiel électrique),
2. une mémoire de 180 MBytes,
3. 35 mn de temps CPU pour une seule itération de point fixe dans le module fluide (151400 équations à résoudre).

La précision obtenue sur le champ de vitesse est égale à 5%. Ces données sont indicatives et correspondent aux nombres de Hartmann et de Grashoff suivants : $Ha = 25.6$, $Gr_{AT} = 3410$. Si ces nombres augmentent, le temps de calcul s'allonge.

La tendance suivante est mise en évidence : la température converge plus rapidement que la vitesse et le potentiel électrique dès que le nombre de Hartmann est non nul. Cette observation suggère que pour l'ordre de grandeur des nombres adimensionnels impliqués dans nos simulations, le couplage entre la température, le champ de vitesse et le potentiel électrique, se simplifie rapidement en un couplage entre le champ de vitesse et le potentiel électrique.

4. Résultats

Lors des simulations numériques, deux critères sont à respecter :

1. le code Poly3D™, initialement conçu pour traiter des écoulements rampants newtonien ou non-newtonien ne permet pas la simulation d'écoulements caractérisés par des nombres de Reynolds trop importants,
2. il faut tenir compte de la limitation des ressources informatiques disponibles lors du maillage 3-D du volume fluide.

Par suite, ces limitations se répercutent sur la valeur des nombres adimensionnels de notre étude. Les nombres de Grashoff $Gr_{\Delta T}$ et de Hartmann Ha , considérés dans cette étude, ne dépassent pas les valeurs 3410 et 50.3. Si ces valeurs sont dépassées, le module fluide ne converge pas (nombre de Grashoff trop important), ou bien d'importantes oscillations numériques sont engendrées par la mauvaise résolution du maillage (nombre de Hartmann trop grand) et le modèle de couplage ne converge pas.

Ces difficultés de convergence du code justifient la stratégie suivante : quatre écoulements thermogravitaires MHD sont simulés suivant l'ordre précisé dans le tableau ci-dessous. Ces écoulements se distinguent par la valeur de la viscosité moléculaire ou bien par la valeur de l'intensité du champ magnétique appliqué. Afin de faciliter la convergence du code, les résultats issus de la simulation (n-1) jouent le rôle de données initiales pour la simulation n suivante.

Simulation 1.	$Pr=2.5$, $Gr_{\Delta T} = 34.1$ et $Ha = 0$
Simulation 2.	$Pr=2.5$, $Gr_{\Delta T} = 34.1$ et $Ha = 8$
Simulation 3.	$Pr=0.25$, $Gr_{\Delta T} = 3410$ et $Ha = 25.6$
Simulation 4.	$Pr=0.25$, $Gr_{\Delta T} = 3410$ et $Ha = 53.3$

A faibles nombres de Rayleigh Ra_G , le pronostic analytique de Cowley [1994] dans le coeur de l'écoulement est en accord avec cette étude numérique. Pour la zone hors-coeur, l'interprétation des résultats met au premier plan un circuit électrique de géométrie différente de celle proposée par Cowley pour un régime thermique II. Cependant, ces deux études analytiques et numériques s'accordent sur le fait que les couches de Hartmann demeurent électriquement inactives : l'ordre de grandeur du champ de vitesse ne dépasse pas Gr_G/Ha^2 dans le coeur et $Gr_G/Ha^{3/2}$ dans les deux couches parallèles.

4.1. Coeur de l'écoulement

Le champ de vitesse dans le centre du cylindre prend progressivement la forme d'un profil linéaire établi et unidirectionnel (figures 4a à 4c en fin de chapitre) lorsque le nombre de Hartmann augmente : la condition de présence d'un régime de coeur $\varepsilon < (\text{Pr Ra}_{AT})^{-1/4}$ est mieux validée puisqu'alors le nombre de Rayleigh modifié diminue. Dans un deuxième temps, un freinage MHD important s'applique sur le champ de vitesse dans le coeur nouvellement créé. Ce phénomène de freinage confirme les observations expérimentales (chapitre III). En conséquence, les isothermes, visibles sur les figures 5c et 5d (fin du chapitre) dans le plan XZ, mettent en évidence l'émergence d'un régime plus conducteur, caractérisé par des isothermes d'inclinaisons voisines de la direction verticale. Par ailleurs, la distribution quadripolaire du potentiel électrique dans la section centrale du cylindre $X = 0$ (figure 9a à la fin du chapitre) est en accord avec le pronostic analytique d'Alboussière *et al* [1994]. Conformément au calcul analytique de Cowley [1994] et à nos résultats expérimentaux (Davoust *et al* [1994]), la forme courbée des isothermes notamment au voisinage des parois (condition d'adiabaticité) est à l'origine de quatre recirculations dans chaque quadrant de cette section (figure 6a en fin de chapitre). En outre, l'ordre de grandeur du champ de vitesse transversal associé à ces recirculations est approximativement égal à 4 % ou 16 % de la composante axiale U du champ de vitesse lorsque le nombre de Rayleigh modifié vaut, respectivement, 1.29 (coeur quasi-stagnant, quasi-stratifié) ou 0.28 (tendance vers un régime thermique II).

Ces phénomènes, déjà mis en évidence soit par l'expérience, soit par la théorie, constituent une validation de la version MHD du code POLY3D™.

4.2. Ecoulement hors coeur

Si dans le centre de la cavité, l'écoulement thermogravitaire de coeur est prédit par les théories analytiques disponibles (Cowley[1993], Cowley[1994]), en revanche, de part et d'autre de la section centrale de la cavité, l'influence d'un élanement horizontal modéré de la cavité entraîne de profondes modifications sur la structure de l'écoulement. Cet écoulement relativement complexe, qualifié d'écoulement hors-coeur, présente une organisation différente du coeur qui ne peut être uniquement justifiée par le proche voisinage des couches parallèles. L'apparente complexité du champ de vitesse dans l'écoulement hors-coeur est principalement due à une asymétrie des distributions de température dans les plans verticaux transversaux et longitudinaux. Après une description de cet écoulement, une interprétation via une analyse des ordres de grandeur basée sur les distributions de température et du potentiel électrique est proposée.

4.2.1. Phénomènes typiques

Les figures 8a à 8d (fin du chapitre) représentent les trajectoires calculées de particules fluides initialement distribuées sur l'axe X, du cylindre. Ces trajectoires restent contenues dans le plan vertical longitudinal XZ. Pour les quatre valeurs du nombre de Hartmann ($Ha=0, 8, 25.6, 53.3$), la circulation de Hadley demeure aisément identifiable. En revanche, dès lors que le nombre de Hartmann est non nul (figures 8b à 8d en fin de chapitre), deux cellules secondaires marginales, symétriques l'une de l'autre par rapport au plan central transversal YZ, se superposent à la circulation principale de Hadley, entre les couches parallèles et le cœur de l'écoulement freiné. L'évolution de ces deux cellules secondaires se caractérise par un déplacement vers les extrémités en même temps que l'épaisseur des couches parallèles δ_H diminue suivant la loi d'échelle :

$$\delta_H \sim Ha^{-1/2},$$

Le champ de vitesse \vec{u} associé à ces deux cellules secondaires fait cependant l'objet d'un freinage important, mis en évidence sur les figures 4c et 4d (fin du chapitre). Ce freinage suggère que ces cellules disparaissent au profit d'une nouvelle organisation MHD s'imposant à nombres de Hartmann plus importants. Nous conjecturons que cette dernière organisation MHD serait alors prédite par la théorie analytique de Cowley [1994], spécifiquement mise en place pour des régimes thermiques II à nombres de Rayleigh Ra_G très faibles.

Un suivi de particules injectées sur un axe transversal coupant exactement l'oeil de la cellule secondaire localisée dans la zone la plus chaude du cylindre met en évidence deux phénomènes importants pour le cas $Ha=25.6$:

1. toute particule injectée à l'intersection de l'axe transversal avec le plan vertical longitudinal XZ suit une trajectoire enroulée autour de la cellule secondaire, contenue dans le plan XZ,
2. les autres particules, injectées de part et d'autre du plan XZ sont soumises à un effet tridimensionnel qui s'illustre par une attraction vers le plan XZ, dans la partie supérieure du cylindre (figure 8e en fin de chapitre), ou bien par un rejet de ces particules hors du plan XZ dans la partie inférieure de la section.

Ces observations laissent suggérer qu'une modélisation 2D dans le plan XZ (prenant en compte les couches de Hartmann) suffirait à prédire l'écoulement dans ce plan, *a priori* non soumis aux effets 3-D mentionnés ci-dessus. Cependant, le paragraphe suivant démontre que la présence de ces cellules secondaires est expliquée par un circuit électrique tridimensionnel.

L'allure des lignes de courant observées dans le plan XZ est cohérente avec le champ de vitesse transversal, représenté pour le cas $Ha=25.6$, à l'intérieur de sections appartenant à la moitié chaude du cylindre : $X>0$ (figures 6a à 6f en fin de chapitre). Le champ de vitesse transversal, dans l'autre moitié du cylindre, peut alors être déduit par symétrie centrale.

La symétrie à quatre vortex, valable uniquement dans le coeur de la cavité, est progressivement remplacée par une structuration de l'écoulement transversal à deux vortex (figures 6b à 6d en fin de chapitre), qui impose une composante verticale du champ de vitesse \bar{W} , paradoxalement négative dans cette région de la cavité. Puis cette structuration de l'écoulement disparaît également pour laisser place à l'écoulement recirculant vertical ascendant dans la couche parallèle formée au front chaud du cylindre (figure 6f en fin de chapitre). La section $X=1.4$ réalise une coupe de la cellule secondaire. Dans cette section, le champ de vitesse est fortement tridimensionnel (figure 6e en fin de chapitre) et présente une composante transversale \bar{V} , en accord avec les trajectoires dans le plan YZ commentées ci-dessus et représentées sur la figure 8e (fin du chapitre).

4.2.2. Interprétations

Une compréhension de l'organisation de l'écoulement dans le coeur puis dans la zone hors coeur est proposée dans ce paragraphe. Afin de consolider cette interprétation, une analyse des ordres de grandeur est menée à partir des distributions de température et de potentiel électrique.

Régime thermique II ou III ?

Pour les cas simulés à nombres de Hartmann importants ($Ha = 25.6, 53.3$), un coeur prend place au centre du cylindre. En effet, les nombres de Rayleigh modifié Ra_G , calculés pour ces deux nombres de Hartmann, sont modérés ($Ra_G = 1.28, 0.29$). Un gradient de température axial G , uniforme, est défini sur ce coeur dont l'extension longitudinale est de l'ordre du rayon de la cavité. De même qu'au chapitre expérimental III, l'écart de température adimensionné $\bar{\theta}$ est défini par l'expression :

$$\bar{\theta} = \frac{T - T_1 - \Delta s T_1 - G X}{G R_G},$$

où le symbole $\Delta s T_1$ désigne le saut de température à l'extrémité froide de la cavité (chapitre I). Par comparaison avec l'étude théorique de Cowley [1994], l'écart de température $\bar{\theta}$ est similaire, dans le coeur de l'écoulement, à la somme $(Ra_G \Theta_1 + Ra_G^2 \Theta_2 + Ra_G^3 \Theta_3 + \dots)$. Sur la figure 7d (fin du chapitre), l'écart de température $\bar{\theta}$ est représenté le long des génératrices inclinées à $\pm 45^\circ$. Il apparaît clairement que dans le coeur de l'écoulement, le profil $\bar{\theta}$ est symétrique. En revanche, au voisinage des extrémités, l'asymétrie par rapport au plan

longitudinal horizontal XY, portant sur les dérivés suivant X de l'écart $\tilde{\theta}$, est mise en évidence pour un nombre de Rayleigh modifié de l'ordre de l'unité ($Ra_G=1.28$). Cette asymétrie tend à disparaître si le nombre de Rayleigh est plus petit ($Ra_G=0.29$). Sur la figure 7c (fin du chapitre), les isothermes dans la région diffusive chaude sont représentées dans le plan vertical XZ. Contrairement au pronostic de Cowley [1994], valable avec l'hypothèse d'un régime thermique II, on peut prévoir que dans les cas où le nombre de Rayleigh Ra_G est de l'ordre de l'unité, l'asymétrie mise en évidence sur la valeur et le signe du gradient axial de l'écart de température $\partial\tilde{\theta}/\partial X$, ne permet pas d'engendrer une structure de jet axisymétrique matérialisée par deux vortex contrarotatifs dans le plan XZ (cf. chapitre I). Sur la figure 7a (fin du chapitre), les isothermes sont représentées dans la section $X=1.5$, localisée en région diffusive chaude. Contrairement au cas de la section centrale $X=0$, la température moyenne dans cette section n'est pas obtenue sur l'axe horizontal Y mais en-dessous de cet axe. En conséquence, le gradient transversal de température $\partial\tilde{\theta}/\partial Y$ est majoritairement positif ou négatif, respectivement, dans la zone $Y>0$ ou $Y<0$ de la section. Ces observations se traduisent en outre par un profil de température pariétal autour de la section $X=1.5$ (figure 7b en fin de chapitre), dont le profil, non parfaitement sinusoïdal, s'apparente nettement aux profils expérimentaux obtenus dans la région diffusive chaude de la cellule MASCOT pour une gamme précise du nombre de Rayleigh modifié Ra_G , comprise entre 0.1 et quelques unités. En conséquence, il semble que d'après ces résultats et d'après l'expérience (chapitre III), pour des élançements de l'ordre de 0.05 à 0.25, le régime thermique II ne puisse être obtenu que pour des nombres de Rayleigh très faibles : $Ra_G < 0.1$. Pour de tels régimes de coeur, le pronostic de Cowley [1994] portant sur l'écoulement de recirculation doit alors s'appliquer.

Interprétation de l'écoulement pour un régime thermique III dit faiblement convectif (cas $Ha=25.6$, $Ra_G=1.28$)

Une analyse des ordres de grandeur est organisée à partir des distributions de température et de potentiel électrique pour le cas simulé $Ha=25.6$, $Ra_G=1.28$. La figure 10 ci-contre précise la position angulaire et verticale des points A et B où cette analyse est menée. Etant données les propriétés de symétries de l'écoulement (symétrie centrale et symétrie par rapport au plan longitudinal vertical XZ), l'étude suivante est transposable en d'autres points de la cavité.

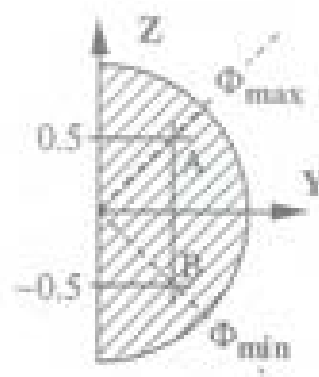


Figure 10.

Dans le coeur de l'écoulement, le champ de vitesse transversal (symétrie à quatre vortex), créé par la distribution de température $\bar{\theta}$, dans la section centrale $X=0$, a une composante horizontale \bar{V} majoritairement convergente vers le plan médian vertical XZ . Une carte des isovaleurs des composantes transversales \bar{V} et \bar{W} est représentée sur la figure 10 ci-dessous. L'écoulement transversal dans la section est aspiré dans les couches limites thermiques au voisinage de la paroi du cylindre et y recircule.

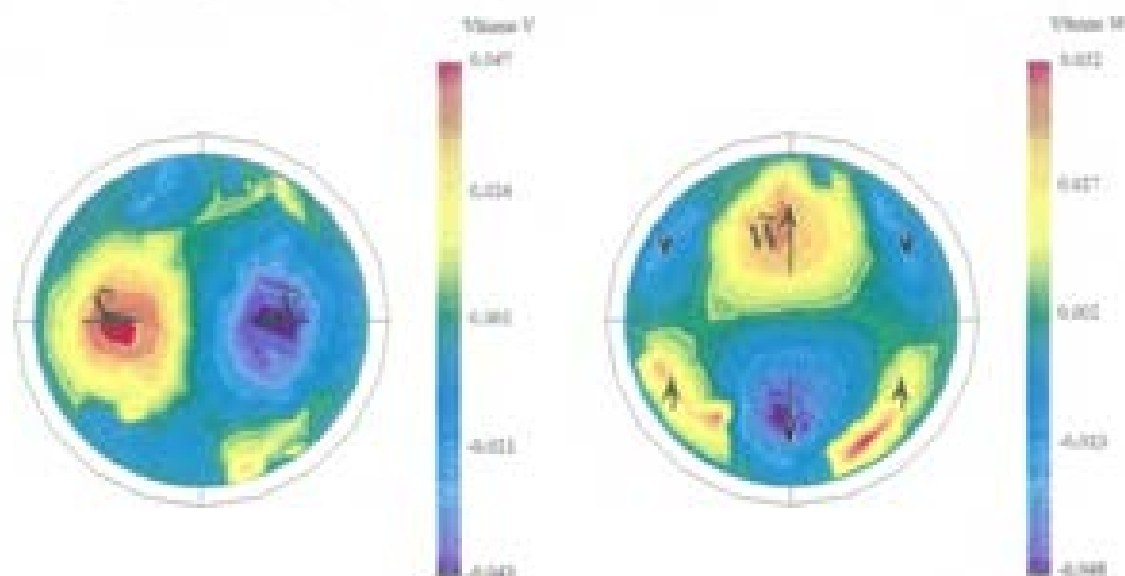


Figure 10. Carte des isovaleurs des composantes \bar{V} et \bar{W} , du champ de vitesse transversal.

D'après la loi d'Ohm, la composante axiale de densité de courant électrique s'écrit :

$$\bar{J}_x = \frac{-\partial \bar{\phi}}{\partial X} + \bar{V}.$$

Sur la figure 9c (fin du chapitre), les distributions de potentiel électrique le long des génératrices inclinées à 45° , respectivement localisées à la paroi et mi-distants du centre et de la paroi, mettent en évidence une faible pente du potentiel électrique dans le coeur. Une évaluation précise apporte les ordres de grandeur suivants évalués au point A, de la section centrale :

$$\left. \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial X} \right|_A = -0.02 \quad \text{et} \quad \bar{V} \Big|_A = 0.042.$$

Cette composante \bar{V} du champ de vitesse, négative dans le quadrant de la section contenant le point A, équilibre un gradient axial de potentiel électrique ainsi qu'une faible densité axiale de courant électrique \bar{J}_x , tous deux négatifs. Par suite, le coeur est à l'origine d'une faible décroissance (composante $\bar{V} < 0$) ou croissance (composante $\bar{V} > 0$) du potentiel électrique respectivement dans la partie $Y > 0$ ou $Y < 0$ du cylindre. La distribution surfacique du potentiel électrique est représentée sur la figure 9b (fin du chapitre). A l'extrémité chaude du cylindre, un

plan de coupe réalisé suivant un angle de 45° par rapport au plan vertical transversal YZ permet au lecteur d'observer la symétrie par rapport au plan vertical longitudinal XZ caractérisant la distribution du potentiel électrique sur la totalité du cylindre. Un examen attentif de cette figure confirme par l'élargissement ou le rétrécissement des taches rouges (potentiel électrique positif maximum) ou bleus (potentiel électrique négatif minimum), qu'un gradient axial de potentiel électrique est effectivement créé par le coeur. Par ailleurs, la symétrie quadripolaire caractéristique de la distribution de potentiel électrique dans le coeur n'est exactement observée que dans la section centrale du cylindre. La seule symétrie, toujours valable dans le coeur ou bien dans la zone hors-coeur, est une réflexion simple par rapport au plan vertical longitudinal XZ (validée sur l'expérience MASCOT). En conséquence, la densité axiale de courant électrique se referme dans le coeur de l'écoulement à l'intérieur de plans longitudinaux horizontaux XY voisins du plan $Z=0$.

Afin de dégager une compréhension complète de la distribution du potentiel électrique $\phi_{\max}(45^\circ)$, (figure 9c en fin de chapitre), il est nécessaire de considérer la zone hors-coeur. Dans le coeur, si la densité de courant axiale induite par le champ de vitesse (composante \bar{V}) existe et demeure faible, en revanche, des effets tridimensionnels importants sont mis en évidence à la hauteur des cellules secondaires ainsi que dans la couche parallèle où l'écoulement global recircule (figures 6c à 6f en fin de chapitre). Il en résulte de fortes dérivées axiales du potentiel électrique au voisinage des extrémités. Dans une section localisée à l'abscisse $X=1.5$ comprise entre la cellule secondaire et l'extrémité chaude du cylindre, les grandeurs suivantes sont évaluées :

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_A = -0.11 \quad \text{et} \quad V|_A = -0.18 \quad \text{d'où} \quad j_x|_A = -0.07.$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial X} \right|_B = +0.17 \quad \text{et} \quad V|_B = +0.25 \quad \text{d'où} \quad j_x|_B = +0.08.$$

Les densités de courant axiales $j_x|_A$ et $j_x|_B$, créées par l'interaction entre le champ de vitesse tridimensionnel et le champ magnétique uniforme ainsi que par les gradients suivant X du potentiel électrique, sont du même ordre. La conservation de la densité de courant se traduit par la fermeture de la densité de courant \bar{j} dans des plans horizontaux sous l'effet d'un gradient transversal de potentiel électrique $\frac{\partial \phi}{\partial Y}$ (section X-1.3). Cette densité de courant transverse d'origine électrique permet de créer un couple moteur de forces de Laplace à l'origine des cellules secondaires clairement mises en évidence dans le plan XZ en X-1.3. Cette fermeture de la densité de courant électrique dans des plans horizontaux est en outre cohérente avec la brisure de la symétrie quadripolaire sur la distribution de potentiel électrique dans la zone hors-coeur. Cette brisure de symétrie se réduit à une réflexion plane par rapport au plan vertical longitudinal XZ toujours valable quelle que soit la section du cylindre. Le circuit électrique déduit de ces considérations est schématisé sur la figure 12.

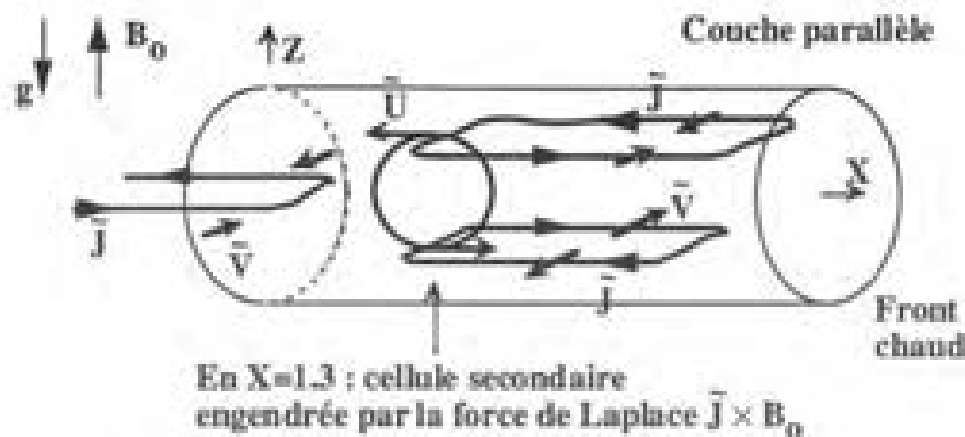


Figure 12. Circuit électrique sur la moitié chaude ($X > 0$) de la cavité.

Dans les équations de Navier-Stokes (IV.1-bis), l'inertie et la viscosité sont négligeables ($Gr_0/Ha^4 = Ha^{-2} = 10^{-3} \cdot 10^{-2}$). Par suite, l'écoulement dans le cœur MHD est à nouveau décrit par le système d'équations mis en place par Cowley [1994], basé sur l'équilibre entre le couple de la force de flottabilité et le couple de la force de Laplace. Ce système d'équations, écrit au chapitre I, fait intervenir l'équation du tourbillon et le rotationnel de la loi d'Ohm :

Tourbillon $\nabla \times (\mathbf{J} \times \mathbf{k}) = \nabla \times (-\theta \mathbf{k}),$

Rotationnel de la loi d'Ohm $\nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{k}) = \nabla \times (\mathbf{J}).$

L'équation du tourbillon délivre la relation entre la dérivée suivant la direction du champ magnétique de la densité de courant électrique transverse J_y , et la dérivée axiale de la température :

$$\frac{\partial J_y}{\partial Z} = \frac{\partial \theta}{\partial X}.$$

Cette relation déjà exploitée lors de l'étude expérimentale (chapitre III), permet d'expliquer par l'absence d'imparité suivant Z , de la dérivée axiale de température $\frac{\partial \theta}{\partial X}$, la création de la densité de courant transverse supplémentaire J_y . A partir des deux équations précédentes (tourbillon et rotationnel de la loi d'Ohm), les trois relations suivantes sont déduites :

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{\partial J_z}{\partial Y} = \frac{\partial \theta}{\partial X},$$

$$\frac{\partial V}{\partial Z} = -\frac{\partial \theta}{\partial Y} - \frac{\partial J_z}{\partial X},$$

$$\frac{\partial W}{\partial Z} = \frac{\partial J_y}{\partial X} - \frac{\partial J_x}{\partial Y}.$$

Appliquons ces relations aux champs de vitesse et de densité de courant électrique engendrés par l'écart $\tilde{\theta}$. Dans ce cas, la composante verticale de la densité de courant électrique \tilde{j}_z est nulle. Le système précédent se simplifie avec les équations (IV.7-1) à (IV.7-3) :

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial Z} = -\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial X}, \quad (\text{IV.7-1})$$

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial Z} = -\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial Y}, \quad (\text{IV.7-2})$$

$$\frac{\partial \tilde{W}}{\partial Z} = \frac{\partial \tilde{j}_Y}{\partial X} - \frac{\partial \tilde{j}_X}{\partial Y}. \quad (\text{IV.7-3})$$

Les composantes axiale et transversale de la vorticité $\tilde{\omega}_X$ et $\tilde{\omega}_Y$ s'expriment par les relations (IV.8-1) à (IV.8-2) :

$$\tilde{\omega}_X = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial Y} - \frac{\partial \tilde{V}}{\partial Z} = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial Y} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial Y}, \quad (\text{IV.8-1})$$

$$\tilde{\omega}_Y = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial Z} - \frac{\partial \tilde{W}}{\partial X} = -\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial X} - \frac{\partial \tilde{W}}{\partial X}. \quad (\text{IV.8-2})$$

Dans la zone hors-cœur, la distribution de température $\tilde{\theta}$, déjà commentée, est trouvée asymétrique. A partir des propriétés mises en évidence sur les gradients de la température $\tilde{\theta}$ (signe et symétrie), et des équations (IV.7-2) et (IV.8-1) ci-dessus, l'évolution globale et les symétries observées sur le champ de vitesse \tilde{u} , peuvent être interprétées. Le champ de vitesse \tilde{u} s'illustre ici, soit par la présence de cellules secondaires marginales dans le plan XZ (figures 8b-8d en fin de chapitre), soit par l'écoulement recirculant dans les régions d'extrémité (figures 6c à 6f en fin de chapitre) présentant une asymétrie par rapport au plan horizontal longitudinal XY, sur les valeurs de la composante transverse V du champ de vitesse (figure 6f en fin de chapitre). Interprétons la présence des cellules secondaires marginales en zones hors-cœur à partir, cette fois, de la distribution de température. Du fait de la symétrie centrale, l'analyse est concentrée sur la cellule secondaire marginale localisée en région chaude. La figure 7d (fin du chapitre) met en évidence le fait que la dérivée axiale de l'écart de température $\tilde{\theta}$, (notée $\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial X}$), est majoritairement positive dans cette région hors-cœur du cylindre (figure 7c à la fin du chapitre). Entre le cœur de l'écoulement quasi-stratifié et la couche parallèle, les figures 6d à 6f (fin du chapitre) ainsi que la figure 13a montrent que la composante verticale du champ de vitesse \tilde{W} suit une évolution caractérisée par une dérivée axiale $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial X}$ positive également. En conséquence, d'après l'équation (IV.8-2), une composante transversale négative de la vorticité $\tilde{\omega}_Y$, est finalement créée et s'illustre par une cellule secondaire (figure 13b).

L'interprétation de l'écoulement thermogravitaire MHD simulé pour le cas $Ra_D = 1.28$, menée dans ce paragraphe, conduit une fois de plus à souligner la cohérence entre le champ de vitesse et les cartes de température et de potentiel électrique obtenues. Notons également la géométrie particulière du circuit électrique dans la région d'extrémités pour cet écoulement caractérisé par un régime thermique III modérément convectif.

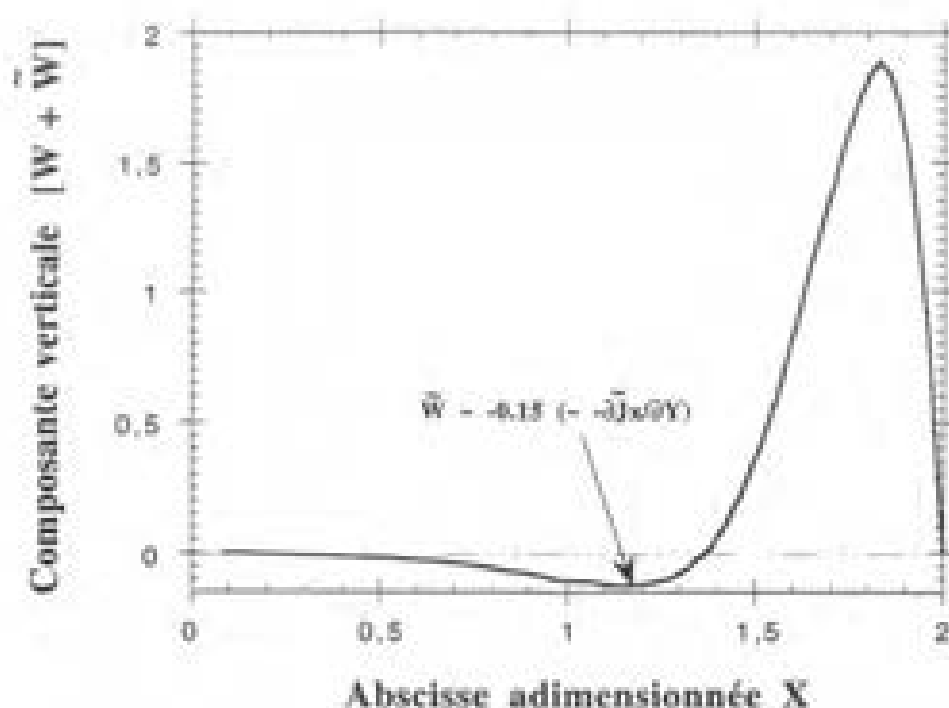


Figure 13a. Profil de la composante verticale du champ de vitesse $[W + \tilde{W}]$ ($X, Y = 0, Z = 0$), sur la moitié $X > 0$ du cylindre.

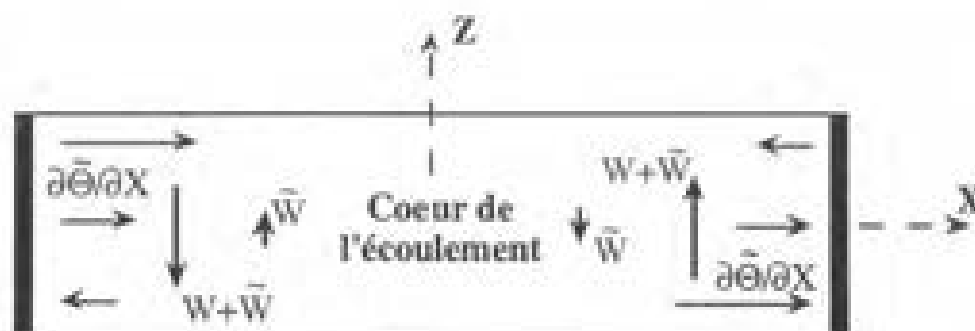


Figure 13b. Interprétation physique de la présence d'une cellule secondaire à partir de la distribution de l'écart de température $\tilde{\theta}$.

5. Conclusion

Une version MHD du code POLY3D™ est présentée dans ce chapitre. Deux écoulements thermogravitaires MHD dans une configuration G-H cylindrique d'éclatement horizontal ϵ égal à 0.25, sont simulés pour un nombre de Prandtl Pr égal à 0.25 et deux nombres de Rayleigh modifiés Ra_G égaux à 1.29 et 0.28. Il est montré que l'écoulement simulé pour un nombre de Rayleigh modifié Ra_G égal à 1.29, est plutôt associé à un régime thermique III faiblement convectif. Comme au chapitre III, ce régime bien particulier peut être considéré comme un régime de transition entre régime thermique III et II. En conséquence, le coeur du cylindre, quasi-stratifié, conduit à des vitesses transversales plus faibles que dans les régions d'extrémités où l'écoulement recircule, et plus faibles également devant la composante axiale de la vitesse dans le centre de la cellule. Dans la zone hors-coeur, l'écoulement présente une structure relativement complexe car pleinement tridimensionnelle. Par une analyse des ordres de grandeur, nous mettons en évidence dans cette zone d'extrémité, un circuit électrique différent de celui pronostiqué par Cowley [1994] pour un régime thermique II. La présence d'effets tridimensionnels sur le champ de vitesse ainsi que de deux cellules secondaires marginales est notamment expliquée par ce circuit électrique. En outre, la cohérence de la distribution de température avec la distribution de vorticité est également soulignée par cette analyse. Les résultats obtenus à l'issue de l'étude 2-D réalisée par Garandet *et al* [1992] mettent également en évidence une inversion de la composante verticale du champ de vitesse entre le coeur de l'écoulement et la couche parallèle jouxtant les extrémités. Ce phénomène est délicat à interpréter puisque ces auteurs supposent la présence d'un régime de conduction (gradient axial de température uniforme). Nous tenons par conséquent à signaler que ce comportement du champ de vitesse, lié probablement à une distribution non intuitive de la pression, pourrait éventuellement constituer une autre explication de la présence des deux cellules secondaires marginales mises en évidence par cette simulation numérique ...

Lorsque le nombre de Rayleigh modifié est plus faible ($Ra_G=0.28$), nous observons qu'un régime thermique II tend à s'installer. Cette évolution est mise en évidence par les points remarquables suivants :

1. la distribution de l'écart de température $\tilde{\theta}$ devient symétrique par rapport au plan horizontal longitudinal XY, sur une plus grande partie (centrée) de la cellule (extension du coeur),
2. par suite, les deux cellules secondaires marginales observées entre le coeur et les zones de recirculation de l'écoulement tendent à disparaître.

Les résultats issus de cette étude numérique ne sont pas contradictoires avec les distributions expérimentales de température et de potentiel électrique présentées au chapitre III, à

nombres de Rayleigh modérés, bien au contraire! Néanmoins, une différence subsiste : dans le cadre de l'investigation expérimentale de l'écoulement, l'analyse des mesures de potentiel électrique fait ressortir pour des nombres de Rayleigh modérés ($Ra_G \sim 1$), une faible contribution de l'inertie dans les zones hors-cœur. Dans cette étude numérique, nous expliquons l'absence de cette contribution par la petitesse des nombres de Grashoff simulés ($Gr_{\Delta T} \sim 10^3$). Pour comparaison, précisons que les nombres de Grashoff expérimentaux sont 100 fois plus élevés sur l'expérience MASCOT.

Finalement, pour qu'un régime thermique II gouverne au sein de cette configuration G-H cylindrique, il faut donc que le nombre de Rayleigh modifié Ra_G soit suffisamment faible et que le groupement $[x(PrRa_{\Delta T})^{1/4}]$ soit plus petit que 0.1. Dans ce cas, on peut penser que si la condition $Ra_G^2 \ll Ra_G \ll 1$ est réalisée, alors des structures hydrodynamiques telles que les cellules secondaires marginales précédentes disparaissent au profit de l'écoulement prédit par la théorie analytique de Cowley [1994] caractérisé par :

1. quatre vortex transversaux dans toute section du cœur prépondérant,
2. un jet axisymétrique de parcelles fluides émergeant des extrémités du cylindre, recirculant à l'intérieur des couches parallèles.

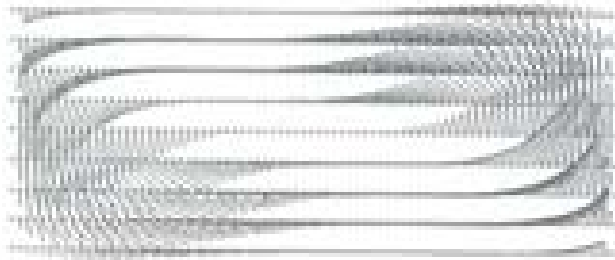


Figure 4a.

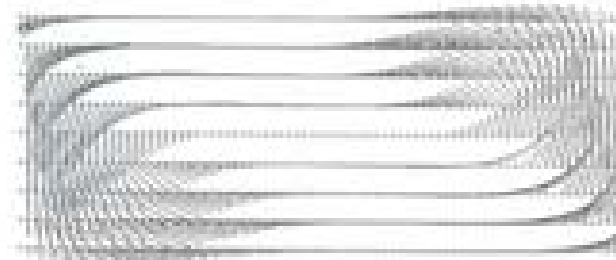
 $Pr=2.5, Gr_{AT}=34.1, Ha=0$


Figure 4b.

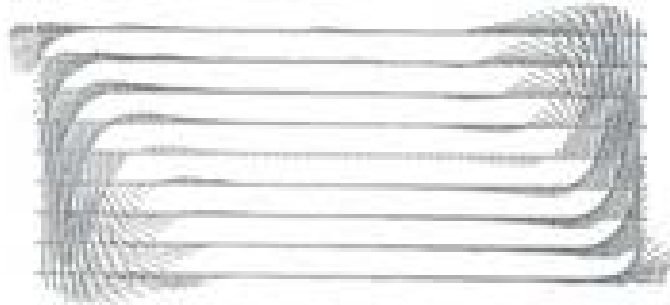
 $Pr=2.5, Gr_{AT}=34.1, Ha=8$


Figure 4c.

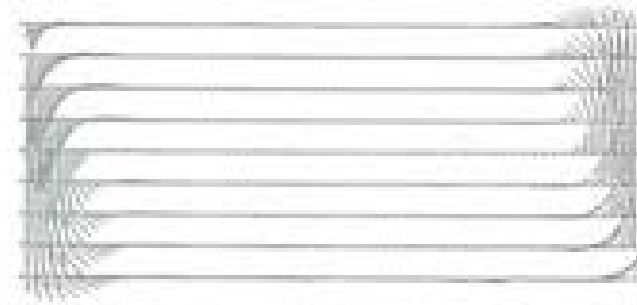
 $Pr=0.25, Gr_{AT}=3410, Ha=25.6$


Figure 4d.

 $Pr=0.25, Gr_{AT}=3410, Ha=50.3$

Figures 4a. - 4d. Champ de vitesse u , dans le plan vertical longitudinal XZ .



$$Ra_G = 1.29$$

$$Ha = 25.6$$

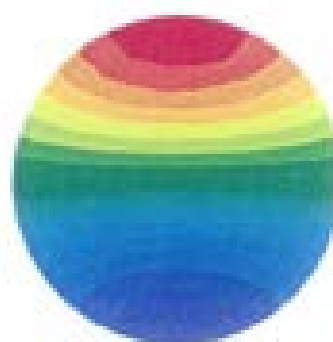
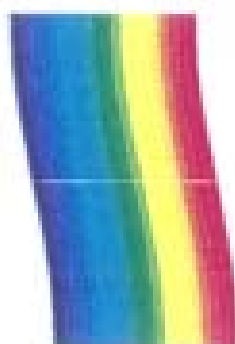


Figure 5a.

Figure 5b.

Température adimensionnée : Θ



$$Ra_G = 0.28$$

$$Ha = 50.3$$

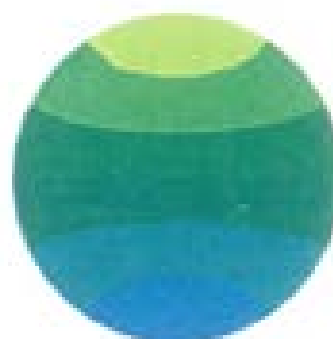
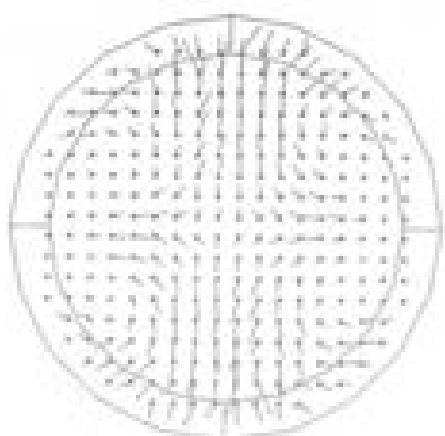
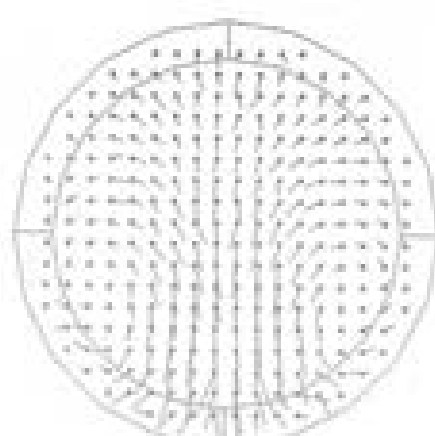
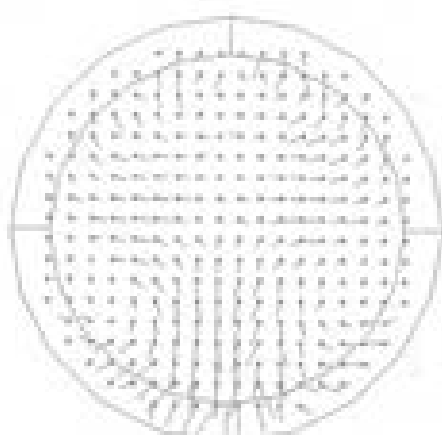
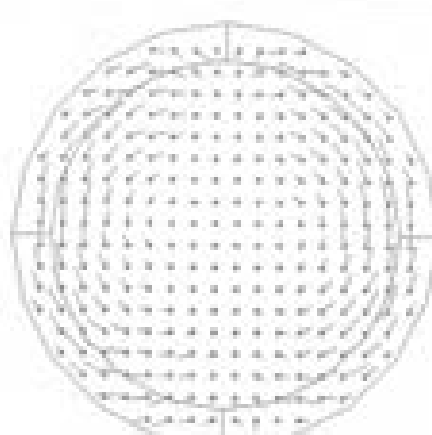
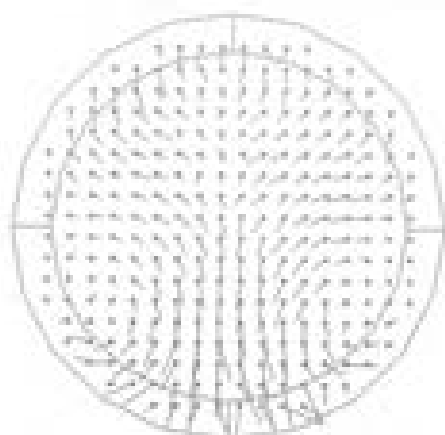
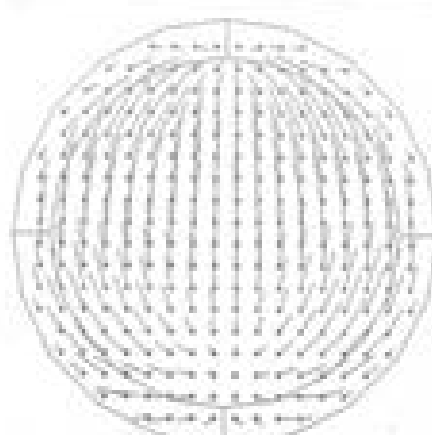


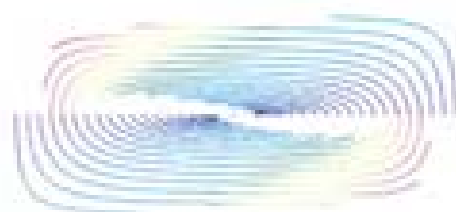
Figure 5c.

Figure 5d.

Figures 5a. - 5d. Isothermes dans la région de coeur, dans le plan vertical longitudinal $Y=0$, (à gauche) et le plan vertical transversal $X=0$ (à droite), pour deux nombres de Rayleigh Ra_G , distincts.

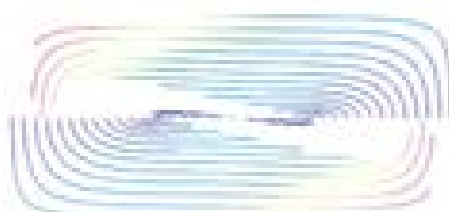
Figure 6a. $X = 0$ Figure 6d. $X = 1$ Figure 6b. $X = 0.5$ Figure 6e. $X = 1.4$ Figure 6c. $X = 0.8$ Figure 6f. $X = 1.5$

Figures 6a. - 6f. Champ de vitesse u_{\perp} , dans différents plans YZ scannés pour le cas $Gr_{AT}=3410$, $Ha=25\%$ et $Pr=0.25$.



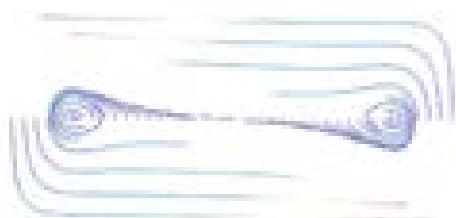
$$Pr = 2.5, Gr_{\Delta T} = 34.1, \\ Ha = 0$$

Figure 8a.



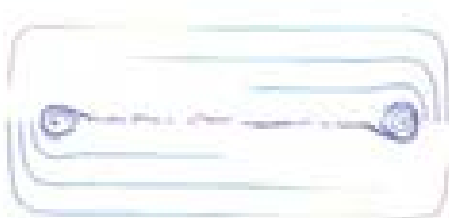
$$Pr = 2.5, Gr_{\Delta T} = 34.1, \\ Ha = 8$$

Figure 8b.



$$Pr = 0.25, Gr_{\Delta T} = 3410, \\ Ha = 25.6$$

Figure 8c.



$$Pr = 0.25, Gr_{\Delta T} = 3410, \\ Ha = 50.3$$

Figure 8d.

Figure 8a. - 8d. Suivi de particules initialement distribuées sur l'axe du cylindre, dans le plan vertical longitudinal (XZ).

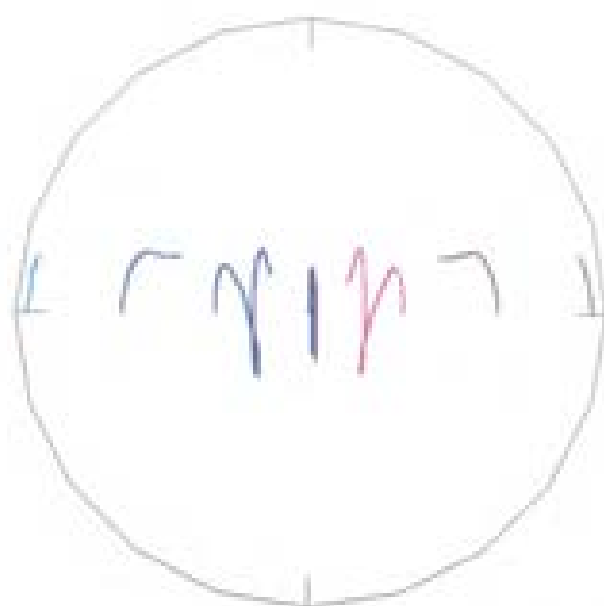


Figure 8e. Suivi de particules initialement distribuées sur l'axe de la cellule secondaire, dans le plan vertical transversal $X=1.4$, pour le cas $Ha=25.6$ et $Gr_{\Delta T} = 3410$

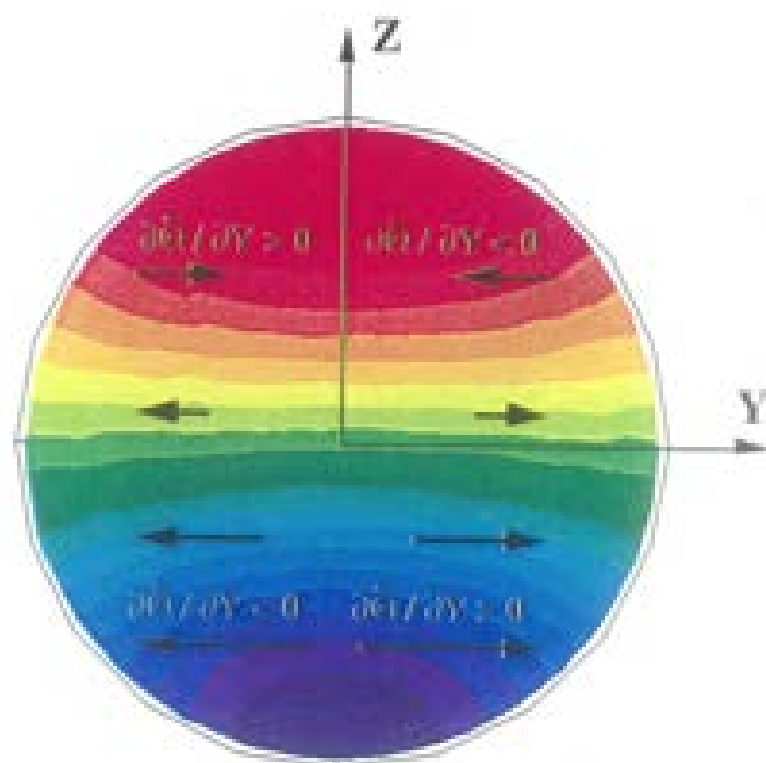


Figure 7a. Isothermes de la perturbation $\tilde{\theta}$, asymétriques par rapport à l'axe Y , dans la section $X=1.5$ localisée en région chaude diffusive ($Pr = 0.25$, $Gr_{\Delta T} = 3410$ et $Ha = 25.6$)

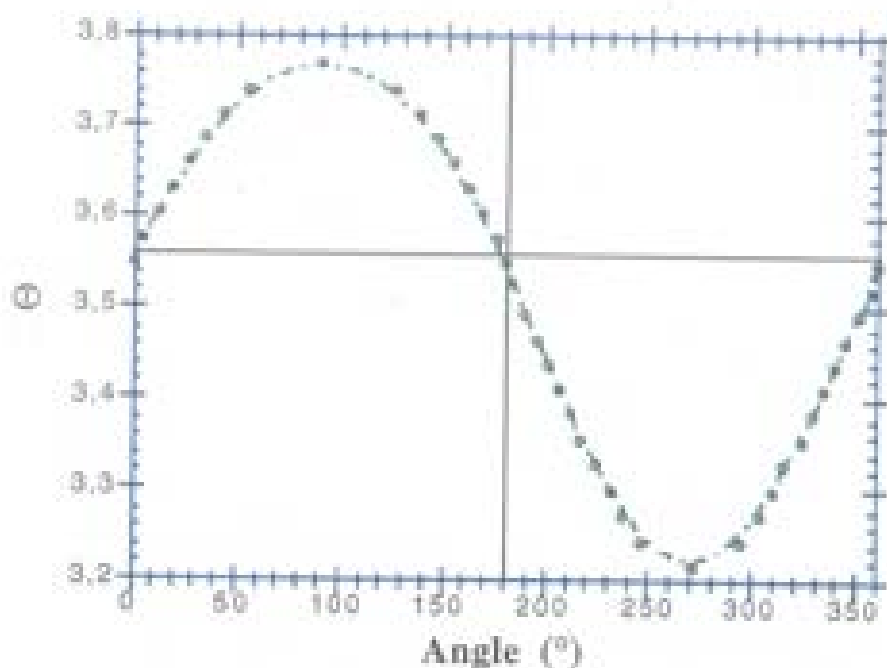


Figure 7b. Distribution de température Θ , autour de la section localisée à l'abscisse $X=1.5$ ($Pr=0.25$, $Gr_{\Delta T}=3410$ et $Ha=25.6$)

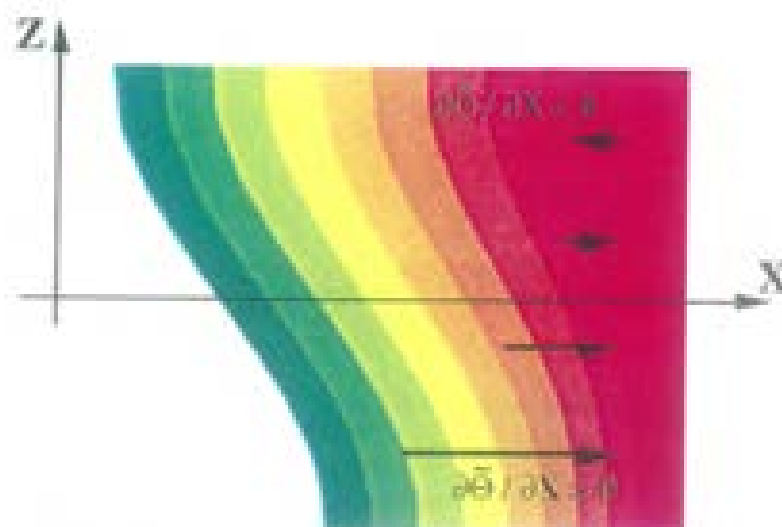


Figure 7c. Isothermes dans le plan XZ en région diffusive chaude : le gradient axial de l'écart de température $\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial X}$ est majoritairement positif ($Pr = 0.25$, $Gr_{\Delta T} = 3410$ et $Ha = 25.6$)

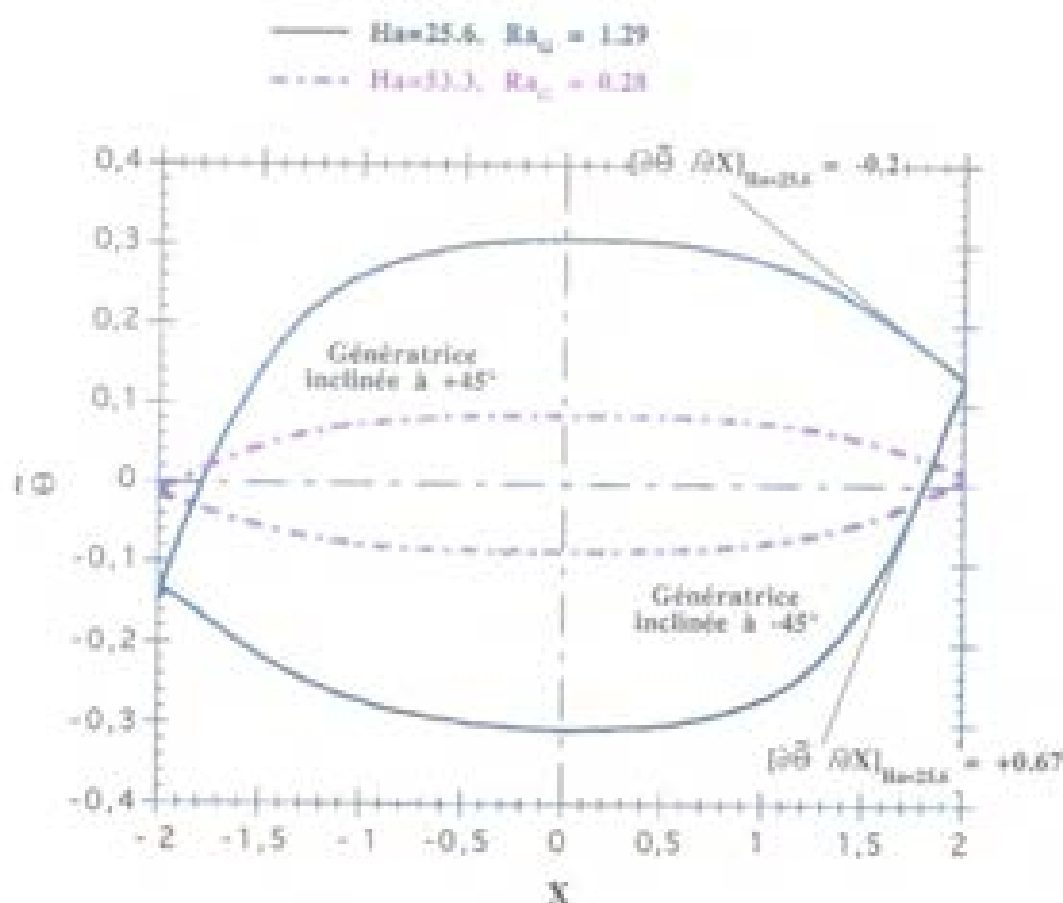


Figure 7d. Distributions pariétales de la perturbation de température $\tilde{\theta}$, le long des génératrices inclinées à $\alpha = \pm 45^\circ$ par rapport à l'axe Y ($Pr=0.25$, $Gr_{\Delta T}=3410$ et $Ha=25.6$)

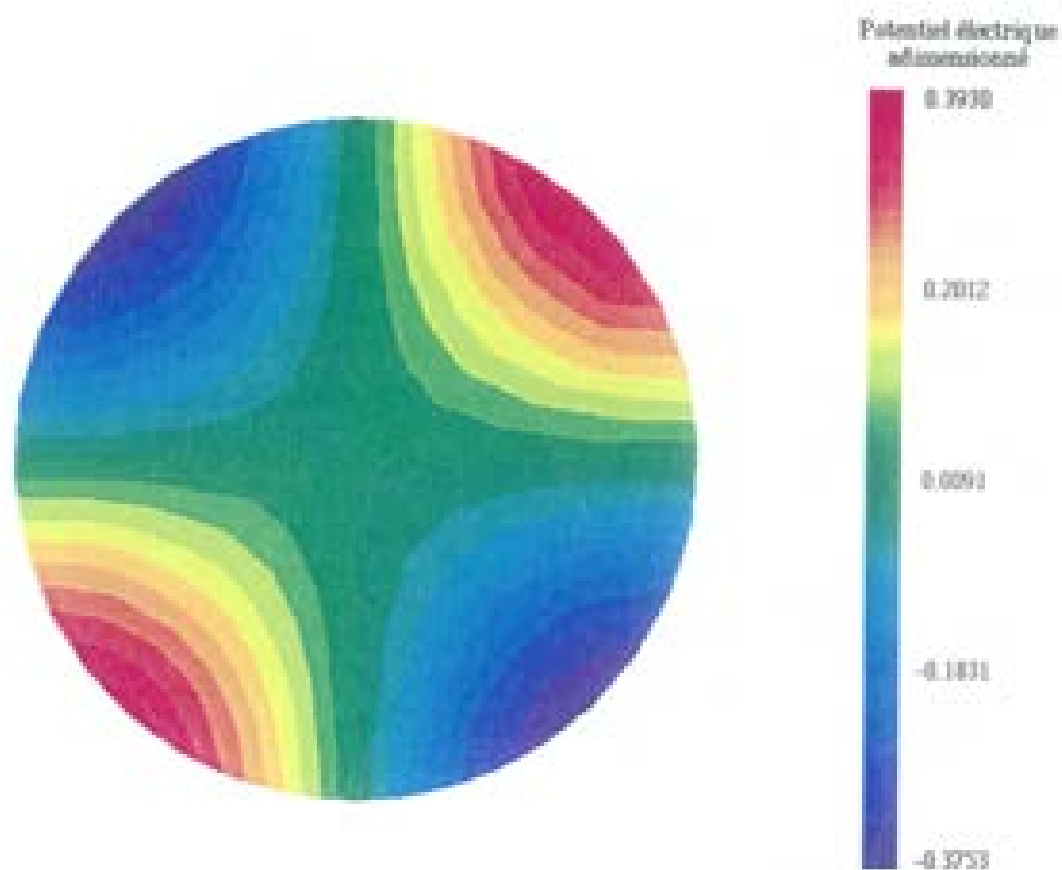


Figure 9a. Isovaleurs du potentiel électrique dans le plan vertical transversal $X=0$

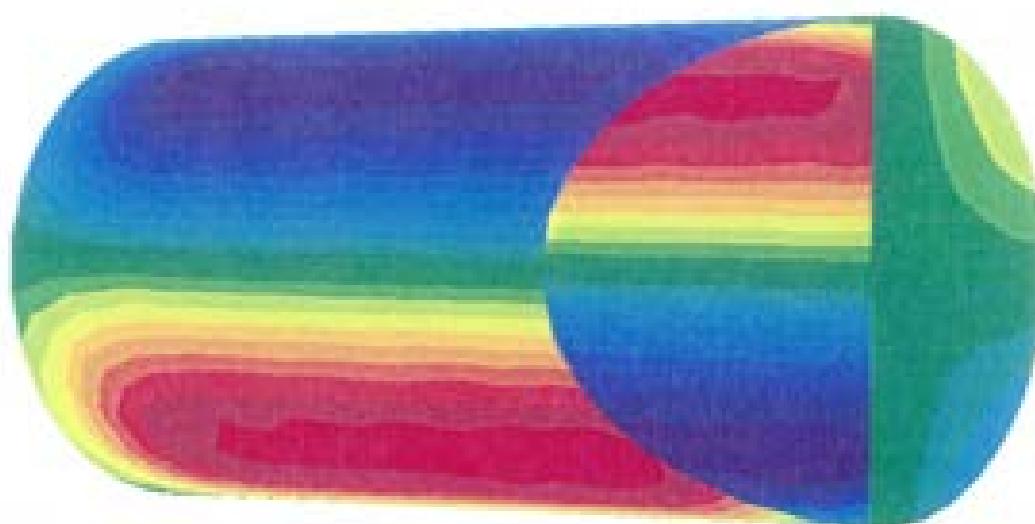


Figure 9b. Isovaleurs du potentiel électrique à la surface du cylindre

Figure 9a. - 9b. Distributions du potentiel électrique pour le cas :
 $Pr = 0.25$, $Gr_{\Delta T} = 3410$ et $Ha = 25.6$

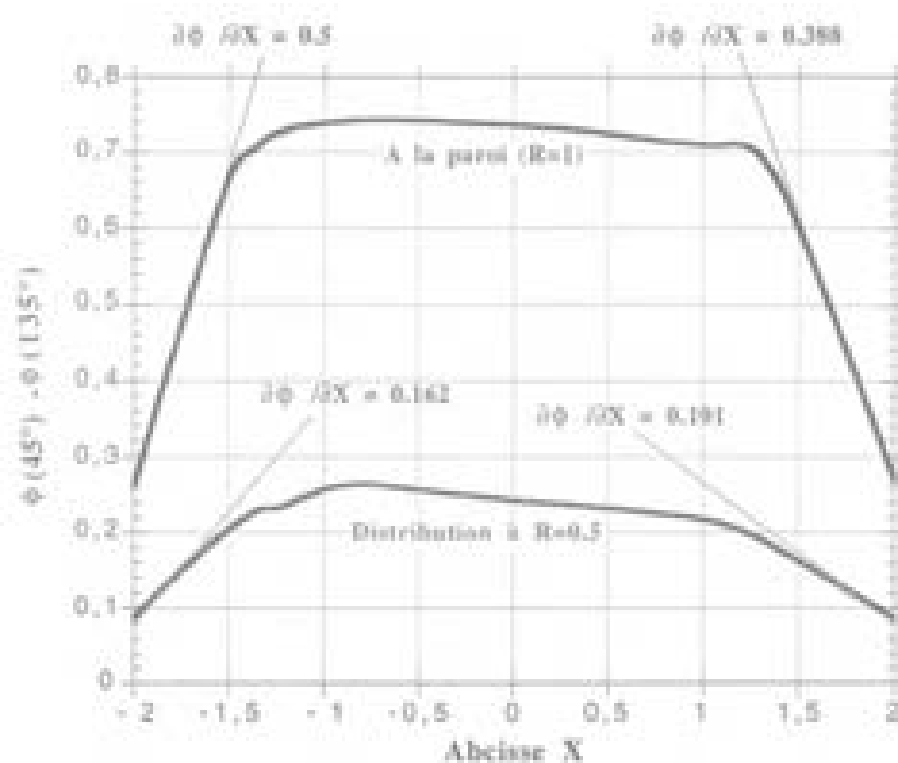


Figure 9c. Distribution de $[\Phi(45^\circ) - \Phi(135^\circ)]$ le long du cylindre
 ($Pr = 0.25$, $Gr_{\Delta T} = 3410$ et $Ha = 25.6$)

CHAPITRE V

Transition vers la turbulence pour un écoulement thermogravitaire M H D

Dans la zone de coeur au centre de la cellule MASCOT, l'écoulement stationnaire se déstabilise d'abord sous la forme d'oscillations avant de devenir turbulent lorsque l'intensité du champ magnétique uniforme B_0 diminue suffisamment. Les théories actuellement disponibles dans la littérature adoptent une analyse linéaire de stabilité pour prédire puis décrire cette transition laminaire-turbulent. Nous mettons en évidence une transition sous-critique puis supercritique au sein de l'expérience MASCOT lors de la déstabilisation de l'écoulement. Cette transition s'accompagne d'instabilités instationnaires qui prennent la forme d'ondes oscillantes progressives ou stationnaires. Nous proposons un diagramme global de stabilité de cet écoulement pour ces instabilités instationnaires. Deux zones se distinguent nettement par la valeur du nombre de Grashoff $Gr_{\Delta T}$ et par l'influence prépondérante ou non d'instabilités stationnaires. Pour des nombres de Grashoff modérés, cette dernière influence est limitée : l'étude expérimentale strictement temporelle de la transition devient possible. Dans ce cas, la bifurcation supercritique est uniquement contrôlée par le nombre de Rayleigh effectif $Ra_2 = Pr Gr_0 / [Ha^2 - 1]$.

1. Introduction

Au cours de la solidification des monocristaux semi-conducteurs en croissance Bridgman horizontale, la convection naturelle instationnaire dans la phase liquide est maintenant bien identifiée comme un facteur générateur de défauts sur les monocristaux. Parmi ces défauts, on peut citer les striations solutales contenues dans des coupes cristallines perpendiculaires à la direction de tirage (Utech and Flemings [1966]). Pour le cas des métaux liquides, les nombres de Grashoff dans de telles configurations peuvent atteindre des valeurs élevées comme 10^5 ou 10^6 . En conséquence, le régime hydrodynamique est instationnaire, voire turbulent. L'effet stabilisant du champ magnétique sur la phase liquide conductrice de l'électricité est mis à profit dans ce cas. Au chapitre III, l'investigation expérimentale menée à partir de distributions de températures et de potentiels électriques moyennées dans le temps, donne accès à la compréhension de la réorganisation MHD de l'écoulement survenant à des nombres de Hartmann Ha de l'ordre de 30. La stabilisation turbulent-laminaire concerne des valeurs du nombre de Hartmann bien moindres : $Ha = 1$ à 10 maximum. Il est donc légitime de se poser les questions suivantes. Comment et quand la stabilisation de l'écoulement survient ? Quel est le type de la transition impliquée ? Quelle est la nature des instabilités impliquées dans cette transition ?

Ce chapitre est voué à l'étude expérimentale de ces instabilités avec comme support de l'expérience MASCOT. Notre étude se concentre essentiellement sur la zone de coeur localisée dans le centre de la cellule. Nous abordons d'abord les points essentiels présentés dans la

littérature, concernant les instabilités, plus particulièrement les oscillations de structures en rouleaux amenées à se former dans les fluides à faible nombre de Prandtl. Les modifications effectuées sur l'expérience MASCOT (capteurs et chaîne de mesures), ainsi que les aspects liés au traitement des signaux sont présentés. Puis nous commentons le diagramme global de stabilité de l'écoulement, obtenu expérimentalement, réalisé dans le plan $(Gr_{\Delta T}, Ha)$. Deux zones se dégagent de ce diagramme, qui correspondent à deux phénoménologies distinctes pour la transition laminaire-turbulent. Sur l'une des deux zones, la transition est fonction de la seule variable temps, tandis que sur l'autre zone, l'écoulement est déstabilisé à la fois dans le temps et l'espace ; il est donc beaucoup plus délicat à analyser directement.

2. Etudes antérieures

La stabilité d'écoulements de convection naturelle de fluides à faible nombre de Prandtl confinés à l'intérieur de configurations G-H est maintenant bien étudiée dans la littérature, exception faite du cas cylindrique. Du point de vue expérimental, il faut citer les études effectuées par Pratte and Hart [1990] sur des cavités parallélépipédiques remplies de mercure en absence de tout champ magnétique appliqué, et par Hurle *et al* [1974], sur une cavité parallélépipédique remplie de gallium en présence d'un champ magnétique uniforme. Une quantité importante de travaux analytiques et numériques concernent l'étude de la transition laminaire - turbulent pour des configurations soumises à un gradient de température horizontal. Ces études sont menées dans des configurations fermées le plus souvent bidimensionnelles ou bien parallélépipédiques. Le cas de la cavité cylindrique, plus réaliste car plus proche de la configuration Bridgman horizontale, n'est pas abordé dans la littérature pour les aspects stationnaires.

Sans champ magnétique, des analyses de stabilité ont été réalisés par Koo and Korpela [1988], Hart [1983], Gill [1974] (études linéaires) et Laure et Roux [1987] (étude non-linéaire) dans le cas de configurations G-H. Ces études se rejoignent toutes quant à la forme des instabilités prédites. Une première famille d'instabilités est liée à la formation de cellules convectives marginales. Parfois appelées rouleaux de convection dans la littérature, ces instabilités sont stationnaires et la section des rouleaux est contenue dans le plan principal (g, Gx) de la circulation de Hadley ; elles sont dites bidimensionnelles car leur axe est dirigé parallèlement aux deux extrémités. L'origine de ces instabilités est purement hydrodynamique puisqu'elles existent même lorsque le nombre de Prandtl est nul. La deuxième famille d'instabilités prédite s'apparente à des instabilités stationnaires et tridimensionnelles. Celles-ci sont le résultat de l'oscillation de cellules convectives en rouleaux, dont les axes contenus dans le plan (g, Gx), sont orthogonaux aux extrémités.

En présence d'un champ magnétique vertical permanent, Bojarevics [1994] et Kaddeche [1995] ont étudié la stabilité linéaire d'un écoulement soumis à un gradient de température horizontal pour les cas, respectivement, d'un milieu 2-D et d'un parallélépipède. Par l'expression "milieu 2-D", nous signifions que la direction orthogonale au plan (g, Gx) est considérée comme infinie.

2.1. Travaux de Hurle *et al* [1974]

Cette expérience originale est réalisée dans une cellule parallélépipédique. Le fluide choisi, à faible nombre de Prandtl, est le gallium. L'objectif consiste à mieux comprendre l'origine de la convection naturelle stationnaire dans une telle configuration. L'étude présente les caractéristiques des oscillations de température observées au moyen d'une sonde de température pilotée extérieurement par un micromanipulateur. Les extrémités de cette cellule

sont soumises à un écart de température. La surface supérieure du gallium est en contact avec une huile silicone supposée garantir une isolation thermique suffisante. Il nous semble que l'unique défaut de cette installation réside dans la présence de cette interface liquide-liquide qui peut générer une nature ou des caractéristiques différentes pour les instabilités que l'on observerait dans une cavité fermée parfaitement isolée thermiquement le long de ses parois latérales. Des effets tels que la variation de la tension superficielle du gallium par rapport à l'huile silicone le long d'une ligne joignant les deux extrémités de températures différentes, ou bien encore, des défauts d'oxydation à la surface libre du gallium sont à craindre.

Résumons les points essentiels tirés de cette étude. A la cellule de Hadley, viennent s'ajouter des oscillations de température de faible amplitude (quelques 1/100 K), apparaissant dès que l'écart de température entre les deux extrémités dépasse un seuil critique noté ΔT_c . Leur fréquence caractéristique ω est proportionnelle à la longueur de la cavité L . En revanche, la largeur de la cavité l exerce une influence brutale sur ω : elle se maintient à un palier de niveau constant, et dès que la largeur dépasse une valeur donnée, la fréquence ω passe à un palier de niveau inférieur. Une analyse plus fine de ce phénomène persiste à manquer mais les études théoriques de stabilité disponibles ainsi que les résultats expérimentaux obtenus sur l'expérience MASCOT suggèrent que l'évolution brutale de la fréquence d'oscillation ω peut être imputable à un changement du nombre de modes pour des rouleaux 3-D d'axes longitudinaux. Hurle *et al* [1974] définissent un nombre de Rayleigh critique Ra_c , calculé à partir de l'écart de température ΔT_c au-delà duquel toute oscillation de température disparaît. Pour un champ magnétique donné, uniforme à l'échelle de l'expérience ($L \cdot H \cdot l = 10 \cdot 1.5 \cdot 1.3 \text{ cm}^3$), l'écoulement est stabilisé en diminuant l'écart de température ΔT jusqu'à la valeur critique ΔT_c . La loi de stabilisation de l'écoulement obtenue par Hurle *et al* [1974] est linéaire avec le carré du nombre de Hartmann : $\Delta T_c = Ha^2$. Aucune information supplémentaire concernant le rôle de ce champ magnétique uniforme n'est mentionnée. En revanche, une carte des phases de ces oscillations est mise en place dans le plan vertical longitudinal de la cavité. Ce travail démontre que la phase tourne d'un angle de 2π à chacune des extrémités. Nous verrons par la suite que les lois précédentes portant sur la stabilisation de l'écoulement et la carte des phases ont été retrouvées dans notre étude expérimentale. En revanche, la comparaison établie entre l'étude théorique de Gill [1974] et les résultats expérimentaux obtenus par Hurle *et al* [1974] sur la stabilisation stationnaire de l'écoulement par la présence d'un champ magnétique nous semble peu licite dans la mesure où la distribution du potentiel électrique influence directement les seuils critiques de transition pour l'instabilité longitudinale instationnaire.

2.2. Travaux de Pratte and Hart [1990]

Nous présentons de manière également plus détaillée l'analyse expérimentale menée par Pratte and Hart [1990] sur le comportement oscillant des instabilités de température observables dans l'écoulement de convection naturelle du mercure à l'intérieur de cavité parallélépipédiques

horizontales, soumises à une différence de température entre leurs deux extrémités. Cette expérience, bien qu'effectuée en absence de champ magnétique, insiste davantage sur l'investigation des ondes à l'origine des instabilités oscillantes observées sur la température. La largeur de la cavité conditionne entièrement le nombre de modes de ces instabilités qui prennent la forme d'ondes longitudinales progressives ou celle d'ondes transversales. Dans cette expérience, le paramètre déclenchant l'apparition ou la disparition des oscillations est la valeur de la différence de température entre les deux extrémités, ΔT , ou encore le nombre de Grashoff $Gr_{\Delta T}$. Par augmentation de ce paramètre, la première instabilité qui apparaît est une instabilité du même type que celle observée par Hurle *et al* [1974] : une onde transversale imputable à l'oscillation de rouleaux 3-D (axes orthogonaux aux extrémités chauffées) comme le prédit l'étude de Gill [1974] ou bien Hart [1983]. La croissance d'une onde longitudinale progressive est ensuite observée. Ainsi, selon les observations de Pratte and Hart [1990], le mode dynamique le plus instable est transversal. Les études linéaires de stabilité à la fois analytiques et numériques (tridimensionnelle) menées par Kuo and Korpela [1988] pour des fluides à faible nombre de Prandtl, prédisent le contraire : des cellules oscillantes transversales (caractérisées par des modes longitudinaux *i.e.* une onde longitudinale) apparaissent en premier dès que $Gr_{\Delta T} > Gr_{\Delta T}^*$ où $Gr_{\Delta T}^*$ est un nombre de Grashoff critique, puis les rouleaux longitudinaux oscillants (modes transversaux) se présentent comme la conséquence d'une augmentation supplémentaire du nombre de Grashoff. Ce désaccord entre résultats expérimentaux et théorie est expliqué par la théorie non-linéaire de stabilisé développée par Laure et Roux [1987]. Cette fois, les oscillations transversales de température sont prédites en premier. Les observations de Pratte and Hart [1990] conduisent à un très faible hystérésis sur la valeur de $Gr_{\Delta T}^*$, qui consolide l'analyse non-linéaire menée par Laure et Roux [1987]. Finalement, la largeur de la cavité conditionne certes, la sélection précédente entre les deux types d'ondes, mais surtout la nature des différentes transitions vers la turbulence. Il faut préciser que l'analyse de ces transitions est rendue possible dans l'expérience de Pratte and Hart [1990] par la bonne stabilité dans le temps des rouleaux 2-D. Notons simplement que parmi les trois transitions trouvées en faisant varier la géométrie de la cellule, Pratte and Hart [1990] montrent l'existence, pour une largeur donnée, d'une instabilité paramétrique générée par transition sous-harmonique à partir de l'onde oscillante transversale initiale. Finalement, les comparaisons quantitatives effectuées entre cette expérience et les prédictions théoriques portant sur la valeur du nombre de Grashoff critique donnent lieu à des écarts significatifs. Ces écarts sont justifiés par la géométrie finie de la cavité qui conditionne la sélection de nombres d'onde plus importants pour les différentes instabilités.

2.3. Théories linéaires de stabilité en présence d'un champ magnétique uniforme : Bojarevics [1994] et Kaddeche [1995]

Ces deux études, à l'instar des études effectuées à champ magnétique nul, s'accordent pour prédire la présence d'instabilités stationnaires 2-D et oscillatoires 3-D déjà décrites. Suivant la méthode analytique de Gill [1974], Kaddeche [1995] effectue une étude linéaire 2-D dans le plan (g, Gx) soumis à un gradient de température horizontal, avec une extension transversale suivant la direction $g \times Gx$ supposée infinie. Les instabilités stationnaires 2-D sont obtenues même avec un nombre de Prandtl nul. D'origine purement hydrodynamique, elles sont liées au fait que lorsque le nombre de Hartmann diminue, le champ de vitesse axial associé à la circulation de Hadley au centre de la cellule passe d'un profil linéaire stable ($Ha \gg 1$) à un profil cubique potentiellement instable ($Ha=0$) pour lequel les contraintes de cisaillement deviennent importantes. En revanche, les instabilités oscillatoires 3-D sont associées à un nombre de Prandtl critique Pr_T , non nul. Kaddeche montre que pour les nombres de Prandtl où elle peuvent exister, le nombre de Grashoff critique Gr_{AT}^* associé à leur apparition ou à leur disparition varie linéairement avec le carré du nombre de Hartmann. Ce résultat est en accord avec la stabilisation des instabilités oscillantes observée par Hurle *et al* [1974] ainsi qu'avec nos résultats expérimentaux. Deux points importants sont à souligner dans cette étude :

1. le potentiel électrique influence les seuils critiques de transition pour l'onde longitudinale oscillante 3-D,
2. la longueur d'onde transversale λ_y de l'onde oscillante 3-D autrement dit, le nombre de rouleaux oscillants, évolue peu avec Ha au contraire de la fréquence ω .

Finalement, cette étude linéaire 2-D de stabilité conclut que lorsque le champ magnétique décroît à nombre de Prandtl donné, le mode dynamique le plus instable est le mode oscillant transversal 3-D. L'étude linéaire de stabilité réalisée par Bojarevics [1994] généralise l'étude de Kaddeche en gardant la dépendance transversale du champ de vitesse attaché à l'écoulement. Supposant l'existence d'un écoulement de base en régime établi au centre d'un parallélépipède, cette étude linéaire démontre qu'un nombre de Hartmann de l'ordre de 1 à 10 est suffisant pour stabiliser l'écoulement et qu'une réduction de ce nombre au-dessous de ces valeurs critiques conduit à des instabilités oscillantes 3-D. Cette transition est fortement retardée par la présence des parois latérales du parallélépipède (largeur finie). Comme Kaddeche, Bojarevics trouve un autre mode stationnaire instable : les cellules convectives 2-D d'axe transversal peuvent coexister avec des instabilités oscillantes 3-D ou même apparaître avant. Le mode dynamique le plus instable n'est cette fois plus le mode oscillant 3-D (Kaddeche [1995]) mais le mode stationnaire 2-D pour des géométries et des nombres Gr_{AT} du même ordre de grandeur que sur l'expérience de Hurle *et al* [1974] ou sur l'expérience MASCOT.

3. Modifications du système expérimental et traitement des signaux

Notre objectif est de présenter les modifications réalisées sur l'instrumentation de l'expérience MASCOT spécifiquement développées pour mener à terme l'investigation expérimentale de l'écoulement instationnaire. Ce paragraphe est donc à distinguer du chapitre II consacré à la présentation de l'expérience MASCOT et de son instrumentation développée pour étudier expérimentalement l'écoulement stationnaire. Nous insistons ici sur les moyens nécessaires pour acquérir et traiter des signaux instationnaires de manière satisfaisante.

3.1. Présentation des capteurs de température

L'amplitude typique des premières oscillations de température est de l'ordre de $1/100$ K. Deux types différents de capteurs sont utilisés pour mesurer ces oscillations. Le premier type de capteur est un ensemble de sondes mixtes (température et potentiel électrique) constituées de deux fils en platine et constantan (pouvoir thermoélectrique d'environ $40 \cdot 10^{-6}$ V/K) et localisées sur 11 demi-cercles le long du cylindre. Leur temps de réponse est excellent grâce à l'amalgame entre la fine couche d'argent déposée à leur extrémité et le mercure. La surface de mesure minimisée garantit en outre une mesure locale précise et rapide. Ce premier type de capteur a déjà été présenté au chapitre II. Le deuxième type de capteurs consiste en une sonde thermocouple chromel-constantan (type E) dont l'excellent pouvoir thermoélectrique est de l'ordre de $68 \cdot 10^{-6}$ V/K. L'extrémité de cette sonde est une boule de diamètre $200 \cdot 10^{-6}$ m ; son temps de réponse est de l'ordre de 1 Hz. Ses caractéristiques techniques assez classiques sont largement suffisantes pour mettre en évidence des instabilités de fréquence caractéristiques pouvant atteindre au maximum le Hertz. A l'instar de Pratte and Hart [1990], les thermistances auraient pu être préférées aux thermocouples. Cependant, pour une plus grande souplesse d'utilisation, ce choix n'est pas retenu. En effet, si les thermistances offrent une plus grande sensibilité que les thermocouples, leur plage de mesure se limite en revanche à quelques degrés.

Les sondes mixtes platine-constantan localisées à la paroi et effleurant la surface de mercure ne peuvent en aucun cas perturber mécaniquement l'écoulement. Par contre, leur sensibilité aux fluctuations de température est faible car la température diffuse à travers la couche limite de Hartmann. Sept thermocouples de type E (deuxième type de capteurs) sont installés sur une double sonde mobile capable de se mouvoir au sein du volume de mercure à l'intérieur de la cellule (figure 1). Cette double sonde mobile est désignée par l'abréviation DSM ; elle doit être distinguée de la sonde mobile mixte (SMM) uniquement développée pour l'étude de l'écoulement stationnaire (dont le principe est exposé au chapitre II). La SMM est remplacée par la DSM pour l'étude expérimentale de l'écoulement instationnaire menée dans ce chapitre. Pour des nombres de Grashoff $Gr_{\Delta T}$ modérés, le niveau de convection est faible de même que l'amplitude des premières oscillations. Par conséquent, les sondes thermocouples localisées aux

parois ne détectent la présence des premières instabilités instationnaires en même temps que les sondes thermocouples installées sur la DSM, que lorsque le régime convectif est suffisamment intense. Pour des différences de température ΔT supérieures à 10K imposées entre les deux extrémités ou des nombres de Grashoff $Gr_{\Delta T}$ élevés, les valeurs critiques du nombre de Grashoff $Gr_{\Delta T}^*$ détectée avec la DSM sont les mêmes que celles obtenues avec les sondes thermocouples localisées aux parois. Il est donc raisonnable de penser que la présence de la DSM au sein de l'écoulement ne provoque pas artificiellement de transition par perturbation mécanique. Le fait de capter la température au sein du milieu fluide présente l'intérêt de mettre en évidence des zones de première apparition des oscillations (§ 4.5.1.1).

Les études réalisées sur les sillages provoqués par un obstacle dans un écoulement MHD sont rares dans la littérature. Néanmoins, d'après l'étude expérimentale réalisée par Lykoudis *et al* [1972] avec du mercure, l'application d'un champ magnétique retarde le détachement tourbillonnaire créé derrière un cylindre : le critère déterminé fait intervenir le paramètre d'interaction, ha^2 / re , défini comme le rapport de la force de Laplace sur les effets inertiels. Si l'inégalité $0.02 < ha^2 / re < 6$ est respectée, aucun détachement tourbillonnaire n'est observé. On trouve pour toutes les expériences effectuées dans le cadre de cette étude, que si l'ordre de grandeur du champ de vitesse est compris entre 1 et 10 mm/s et si le diamètre typique d_{DSM} de la DSM est de l'ordre de 1 mm, alors le rapport ha^2 / re est toujours compris entre 1 et 5. En conséquence, selon l'étude réalisée par Lykoudis *et al* [1972], la DSM ne peut pas être considérée comme un obstacle mécanique. Cependant, afin de s'assurer expérimentalement qu'aucune allée de tourbillons alternés de Von Karman ou qu'aucun sillage d'aucune sorte ne puisse être produit par la présence de cette DSM, sa conception implique deux peignes distincts de thermocouples, dynamiquement indépendants l'un de l'autre dans leurs déplacements axiaux ou bien azimutaux (figure 1). Considérons un nombre de Strouhal S compris entre 0.1 et 0.3. On peut déterminer un ordre de grandeur de la fréquence de Strouhal f_s , c'est à dire la fréquence associée au détachement tourbillonnaire alterné et périodique dû à la présence d'un obstacle en travers d'un écoulement de vitesse globale U_x par exemple. Dans ce cas, f_s est égale à $S \cdot d_{DSM} / U_x$ et son ordre de grandeur est compris entre 100 mHz et 300mHz. Nous pensons que même si le nombre de Prandtl du mercure est faible, similairement à ce qui est observé dans l'étude de l'écoulement MHD stationnaire de l'expérience MASCOT, c'est un nombre de Péclet effectif qui détermine la signature thermique d'éventuelles structures tourbillonnaires. Isolons une structure tourbillonnaire de taille l produite par le sillage potentiel de la DSM ; cette taille l peut être estimée de l'ordre de d_{DSM} c'est à dire $l \sim 1$ mm. Cette structure étant advectée principalement par la vitesse axiale de l'écoulement U_x , le nombre de Péclet effectif pe_{DSM} associé à la structure est donc de l'ordre de $U_x l / \alpha$, où α est la diffusivité thermique. La différence de température pertinente à considérer, Θ_0 , est la différence de température typique vue par la structure tourbillonnaire à l'intérieur de la section où se trouve la DSM : Θ_0 est estimée de l'ordre de 0.1K. Par conséquent, les fluctuations de température Θ' engendrées par le passage d'un détaché tourbillonnaire sont évaluées par la relation :

$$\Theta' = [U_{\infty} l / \alpha] \cdot \Theta_0$$

De l'ordre de 0.1K, ces fluctuations de température pourraient être détectées par notre instrumentation. En fait, même avec des différences de température de plus de 25K imposées entre les deux fronts, il s'est avéré impossible de détecter, à l'aide des thermocouples installés sur le peigne n°2, la moindre trace d'une fréquence de Strouhal dans le spectre du signal thermique. Ces tests de détection de sillage ont été conduits pour plusieurs positions axiales ou angulaires des points de mesure T_4 , T_3 ou T_6 , appartenant au peigne n°2 situé derrière le peigne n°1 directement exposé au mouvement du fluide chaud progressant vers le front froid (figure 1). Ces deux critères nous semblent suffisants pour apporter la preuve expérimentale que la DSM ne constitue pas un obstacle mécanique pour cet écoulement thermogravitaire MHD. La DSM est donc utilisée comme un outil de détermination des caractéristiques des oscillations de température observées sur l'expérience MASCOT. Par l'expression "détermination des caractéristiques", nous entendons :

établir la distinction entre une onde progressive et une onde stationnaire (spatialement),

déterminer le sens, la célérité et la longueur d'onde λ d'une onde progressive, sans le recours à l'hypothèse de Taylor qui serait inappropriée à cet écoulement en cavité fermée.

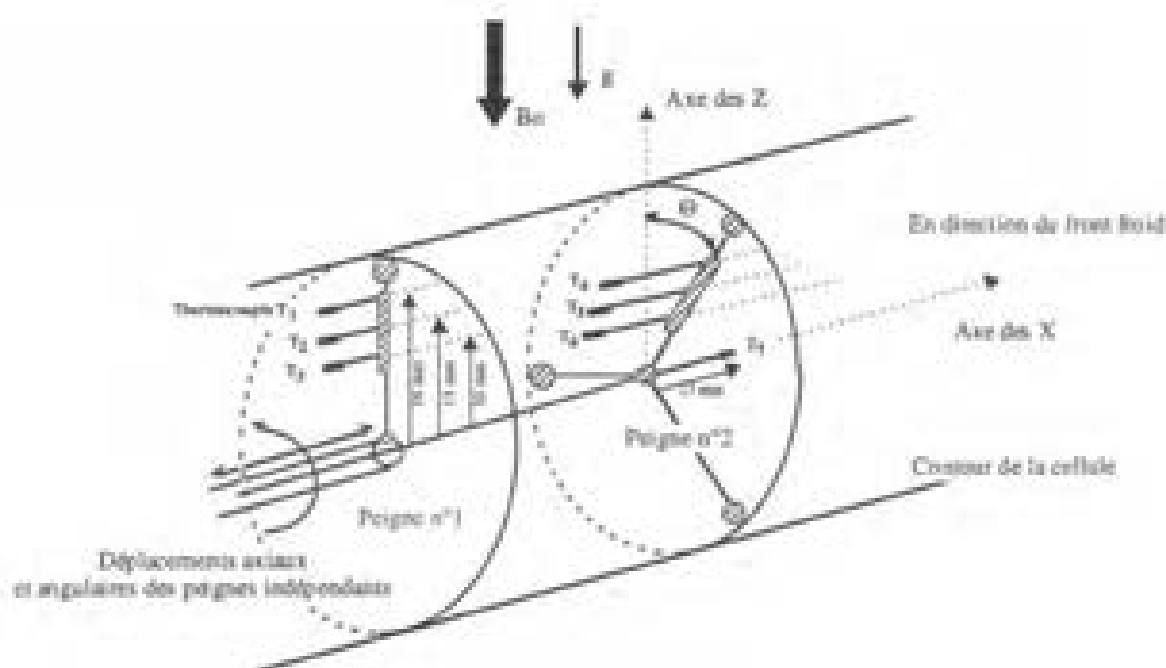


Figure 1. Schéma de la DSM.

3.2. Autres précautions expérimentales

Les instabilités apparaissent lorsque le nombre de Hartmann (proportionnel au champ magnétique créé par l'électro-aimant) descend jusqu'à une valeur critique Ha^*_1 . Nous avons observé la présence d'un hystérisis sur les valeurs de Ha^*_1 et Ha^*_2 , respectivement associées à l'apparition puis à la disparition des oscillations lorsque le nombre de Hartmann balaie des valeurs comprises entre 0 et 30, valeurs extrêmes pour lesquelles l'écoulement est respectivement turbulent ou laminaire quel que soit le nombre de Grashoff expérimental Gr_{AT} programmé dans nos expériences. Cette hystérisis n'est pas lié à l'électro-aimant. En effet, des mesures effectuées avec une sonde de Hall ont permis de montrer que lorsque le courant est diminué ou augmenté suffisamment lentement dans l'électro-aimant, à une précision de 15 Gauss près, aucun hystérisis ne peut être détecté sur le champ magnétique produit B_0 . Son évolution est alors parfaitement linéaire sur la plage de variation du nombre de Hartmann nécessaire à l'étude de phénomènes instationnaires ($Ha = 0$ à 30). Une reproductibilité satisfaisante sur les valeurs critiques Ha^* mesurées n'a été obtenue qu'à partir du moment où le champ magnétique uniforme imposé B_0 diminuait par pas suffisamment faible. Si l'incrément ou le décrétement sur B_0 demeure trop important, l'absence de reproductibilité sur nos mesures s'explique aussi par une variation du flux de B_0 engendrant une perturbation de courant supplémentaire dans le volume fluide. Un rapide calcul des ordres de grandeur présenté en annexe II justifie cette explication.

Finalement, le champ magnétique est programmé par un micro-ordinateur qui pilote simultanément, via une carte entrée-sortie, le générateur de courant continu alimentant l'électro-aimant et la centrale d'acquisition (figure 2). Sauf indication contraire, nos résultats expérimentaux présentés dans ce chapitre sont obtenus à nombre de Grashoff fixé Gr_{AT} , avec des décroissances ou des augmentations du nombre de Hartmann réalisées par décrétement ou incrément de 0.021 toutes les dix secondes. La précision sur les valeurs critiques du nombre de Hartmann Ha^* est évaluée en reproduisant plusieurs fois une même expérience. Le déclenchement d'une acquisition (durée type d'une heure) associée à un nombre de Hartmann donné n'a lieu qu'après une attente de 15 minutes. Ce pilotage automatisé de l'expérience MASCOT a permis de réaliser des expériences de transition vers la turbulence coûteuses en temps, impossibles à réaliser autrement. D'autres précautions expérimentales indispensables doivent être prises. Elles consistent à s'assurer que des phénomènes tels que des effets thermoélectriques ou la présence d'ondes d'Alfvén ne sont pas à considérer dans cette investigation expérimentale. Les calculs qui justifient cette affirmation sont réunis à l'annexe 2.

3.3. Chaîne de mesures, acquisition et traitement de l'information

Après les précisions précédentes apportées sur l'instrumentation adoptée pour l'expérience MASCOT, nous exposons maintenant le principe des outils analogiques et statistiques développés pour filtrer nos signaux par une chaîne électronique, les acquérir, puis traiter les informations qu'ils contiennent.

3.3.1 Chaîne de mesures

A chaque thermocouple correspond une soudure froide localisée dans une boîte (chapitre II) régulée à la température T_0 à une précision de $1/100\text{K}$. Les signaux de température sont composés d'une partie continue prépondérante et d'une faible contribution instationnaire lorsque des instabilités instationnaires sont présentes. Cette dernière contribution, soumise au bruit environnant, seule à nous intéresser dans le cadre de cette étude, est de faible amplitude : quelques $1/100\text{K}$ tout au plus. Ainsi, un problème incontournable est lié au bruit environnant par exemple, le rayonnement hertzien issu de générateurs voisins haute-fréquence et de forte puissance est à l'origine de phénomènes comme l'*aliasing*. L'*aliasing* désigne le fait que si un bruit électronique rayonne à la fréquence f dans l'environnement proche de l'expérience, alors il peut induire des fréquences beaucoup plus faibles f/n (n entier) dans les spectres de Fourier associés aux signaux mesurés et provoquer en conséquence des interprétations physiques erronées. L'unique moyen d'éviter ce problème consiste à filtrer analogiquement les signaux à mesurer. Nos signaux sont amenés sur un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est de 10Hz . La chaîne de mesures qui suit ce filtrage est assemblée sur une plaque qui réunit une amplification de gain moyen 1950 remarquablement stable dans le temps (pas de dérive mesurable sur 24 heures) puis, à la suite, un filtre passe-haut destiné à éliminer la partie continue du signal à étudier. La fréquence de coupure de ce dernier filtre est fixée à 0.1 mHz . Cette opération effectuée, nous bénéficions de la pleine échelle de lecture du système d'acquisition.

3.3.2 Acquisition et traitement des signaux

Pour l'acquisition des signaux analogiques, nous disposons d'un convertisseur analogique-digital et d'un multiplexage intégré dans le voltmètre HP3852A (figure 2).

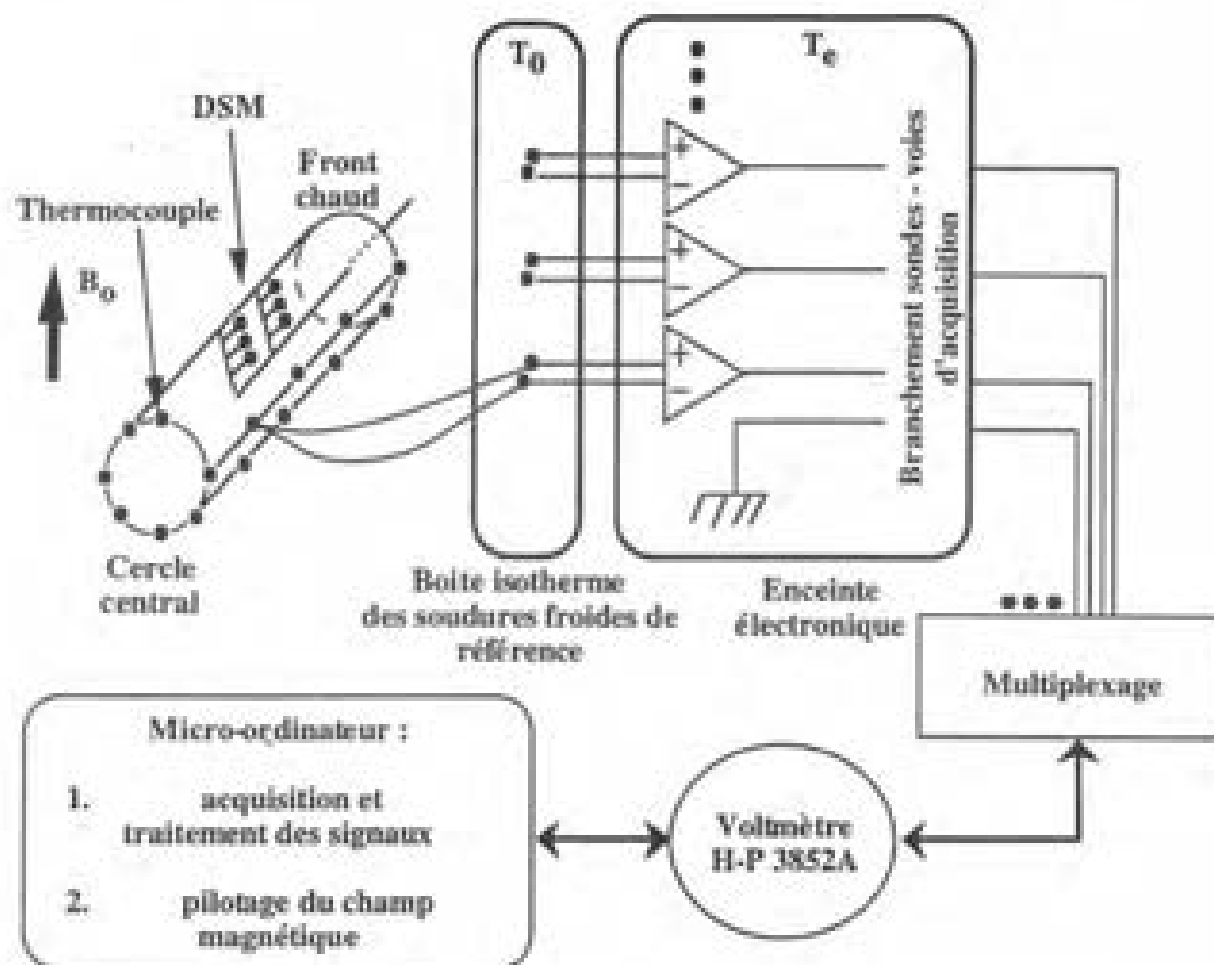


Figure 2. Acquisition des signaux et pilotage du champ magnétique.

L'amplitude pic à pic de nos signaux après amplification varie entre 0.1 et 10 mV en fonction de l'intensité de la convection. Pour acquérir ces signaux, nous avons choisi d'utiliser là encore un voltmètre intégrateur (type HP44701A) plutôt qu'un voltmètre rapide pour trois raisons principales :

1. les fréquences caractéristiques de nos signaux ne dépassent pas le Hertz,
2. il est nécessaire, étant donné la faible amplitude de nos signaux, de s'affranchir absolument du bruit électronique rayonnant à 50 Hz dans le voisinage de la centrale d'acquisition,
3. la plage et la précision de la mesure délivrées par le voltmètre intégrateur conviennent davantage à nos exigences. Nous donnons un tableau comparatif des performances de chacun des deux voltmètres (intégrateur et rapide).

<i>Voltmètre rapide HP44702A</i>	<i>Voltmètre intégrateur HP44701A</i>
plage : 40mV	plage : 30mV
précision de mesure : 0.05%+68.10 ⁻⁶ V	précision de mesure : 0.02%+6.10 ⁻⁶ V

La mesure sur voltmètre intégrateur se programme en nombre de cycles d'intégration, NPLC. Un nombre de cycles correspond au temps d'intégration analogique utilisé par le voltmètre pour effectuer (analogiquement) sa mesure pendant le temps $NPLC \times 1/50$ secondes : NPLC est le nombre de périodes du réseau. L'intérêt est immédiat : si NPLC est un nombre entier, tout *aliasing* dû à la fréquence 50Hz est automatiquement éliminé par l'intégration analogique de la mesure. Nous avons choisi un nombre de cycles NPLC égal à l'unité et effectué des mesures en scannant trois voies d'acquisition successives dans le but d'effectuer des corrélations dans la phase postérieure du traitement statistique. La fréquence d'échantillonnage de nos signaux (6.06 Hz) nous permet largement de respecter le critère de Shannon.

Le traitement des signaux est ensuite réalisé par développement de programmes personnalisés sous le logiciel MATLAB. Nous apportons des précisions concernant la construction des spectres de Fourier exposés dans ce chapitre. Le couple pertinent à considérer dans ce cas, est le couple (f =fréquence d'échantillonnage, $N_{données}$ =nombre de points de mesures). Ces spectres sont réalisés sur la base de fichiers caractérisés par le couple : (f , $N_{données}$)=(6.06 Hz, 2^{13} =8192). Ce choix optimise deux critères exigeants et peu compatibles :

1. réaliser une acquisition à une fréquence d'échantillonnage au moins cinq fois plus élevée que la plus haute fréquence caractéristique de notre phénomène,
2. réaliser une acquisition de durée suffisamment longue pour mettre en évidence la plus basse fréquence caractéristique de notre phénomène.

Dans l'exposé des résultats expérimentaux, nous verrons qu'il existe deux fréquences caractéristiques de notre phénomène, éloignées l'une de l'autre d'un rapport voisin de 5. Afin de tenir compte de ces deux fréquences et de mesurer des corrélations sur trois sondes thermocouples, nous nous sommes limités à 8192 mesures sur chacune des trois voies. Nous respectons ainsi la limitation *hardware*, intrinsèque au *buffer* du voltmètre, de 2^{13} -1 mesures pendant une acquisition. Notons que cette limitation se justifie par le besoin de transmettre en un seul paquet les informations mesurées à partir du voltmètre jusqu'au PC en vue d'un stockage sur disque dur. Cette limitation garantit la rapidité et la simultanéité des mesures.

D'autre part, la réalisation de densités spectrales de puissance précises (notées DSP par la suite) requiert un minimum de 8192 points de mesures, multiple de 2, si l'on désire utiliser l'algorithme FFT (*Fast Fourier Transform*) classique, disponible sous environnement MATLAB. La précision sur la fréquence spectrale Δf qui en découle est :

$$\Delta f = (f / N_{\text{données}}) * C(\text{fenêtre}).$$

Le paramètre $C(\text{fenêtre})$, supérieur à 1, dépend de la fenêtre utilisée pour isoler la partie du signal sur laquelle la transformée de Fourier s'applique. Le logiciel MATLAB permet de choisir une fenêtre performante type Blackman (Harris [1978]) qui présente le mérite de minimiser les lobes secondaires résultants d'une convolution de cette fenêtre avec un Dirac de fréquence. Ce problème de lobes secondaires, rencontré avec des fenêtres rectangulaires, entraîne des pics de fréquences parasites, puisque non physiques, autour du pic fréquentiel caractéristique du phénomène à observer. Avec une fenêtre de Blackman, $C(\text{fenêtre})$ vaut 2. Nous avons ensuite programmé deux artifices bien connus dans la littérature dédiée au traitement du signal, qui sont les opérations de moyennage et de recouvrement. Ces outils essentiels sont présentés dans l'article de référence de Harris [1978]. L'opération de moyennage fait perdre en précision sur la fréquence spectrale mais permet de dégager du bruit spectral, les pics caractéristiques de la DSP. Les quatre étapes ci-dessous sont alors observées :

1. le fichier de valeurs mesurées initial F_0 est divisé en N parties égales F_n puis,
2. à chacun des sous-fichiers F_n est appliqué respectivement une convolution avec la fenêtre de Blackman et avec la transformée de Fourier,
3. le résultat de ces convolutions est élevé au carré et délivre une DSP pour chacun des N fichiers,
4. puis les valeurs finales de la DSP sont obtenues en prenant la valeur moyenne des valeurs sur les N fichiers DSP obtenus.

La précision sur la fréquence spectrale, moindre, est de nouveau recalculée afin de tenir compte de ces dernières opérations :

$$\Delta f = (f * N / N_{\text{données}}) * C(\text{fenêtre}).$$

Le fenêtre de Blackman, non rectangulaire, implique en contre-partie une moins bonne représentation des parties du signal convoluées avec les bords de la fenêtre. L'opération de recouvrement permet de gagner en précision : elle consiste en un recouvrement partiel $R\%$ des N sous-fichiers précédents puis en une convolution de chacun de ces recouvrements partiels avec la fenêtre de Blackman. Le résultat est que, sans avoir acquis davantage de valeurs, les effets de bords liés à la fenêtre choisie sont largement limités. La DSP est ainsi recalculée sur la

basé d'un fichier devenu artificiellement plus long. La précision sur la fréquence spectrale est réactualisée :

$$\Delta f = (f * N / ((1+R\%) * N_{\text{données}}) * C(\text{fenêtre}). \quad (V.1)$$

Ces indications donnent un sens à la précision que nous mentionnons sur l'obtention de nos DSP. Nous avons finalement choisi de ne pas découper nos fichiers de mesures et d'appliquer un recouvrement de 75%. La précision Δf sur la fréquence spectrale obtenue avec le couple $(f, N_{\text{données}})=(6.06 \text{ Hz}, 2^{13}=8192)$ est de l'ordre de 0.8 mHz. Cette indication rarement divulguée dans la littérature relative à la turbulence, est pourtant d'une importance capitale, dans la mesure où par exemple, nombre de *scenarii* vers le chaos sont souvent analysés sur la base d'une commensurabilité ou bien d'une incommensurabilité de deux ou trois fréquences apparaissant dans les DSP. L'intérêt de tracer les portraits de phase de la variable scalaire mesurée prend dans ce cas un intérêt certain.

4. Résultats expérimentaux

4.1. Résultats généraux

Comme spécifié dans les paragraphes précédents, les études théoriques portant sur les instabilités instationnaires dans des configurations de Bridgman horizontales bidimensionnelles (Gill [1974], Hart [1983], Kaddeche [1995]) ou bien parallélépipédiques (Hurle *et al* [1974], Pratte and Hart [1990], Bojarevics [1994]) ont montré qu'en présence ou non de champ magnétique, les ondes oscillantes tridimensionnelles n'existent que pour un nombre de Prandtl non nul et sont donc d'origine thermique. Autrement dit, leur apparition est conditionnée par la croissance ou la diminution du nombre de Rayleigh effectif $Ra = Pr.Gr/Ha^2$. Le pilotage automatisé de l'expérience permet de piloter non pas la différence de température entre les deux fronts mais le champ magnétique uniforme imposé B_0 . Les résultats expérimentaux présentés dans ce chapitre sont donc obtenus par une déstabilisation ou une stabilisation survenant par décroissance ou croissance du nombre de Hartmann. Après et avant dépassement des seuils critiques de déstabilisation ou stabilisation, les instabilités instationnaires prennent la forme d'oscillations de température périodiques. La figure 3 représente un enregistrement illustrant la stabilisation typique de l'écoulement MHD instationnaire à l'intérieur de la cellule associé au nombre de Grashoff $Gr_{15K} = 8.38 \cdot 10^5$. Ce signal correspond uniquement à la partie non continue de la température captée par la sonde T_4 installée sur la DSM, positionnée à l'abscisse $X = 200$ mm et inclinée à $\alpha = 90^\circ$. Les notations X et α gardent la même signification que dans les chapitres précédents (X désigne l'abscisse référencée par rapport au front froid et α , l'angle entre le plan horizontal longitudinal XY et la demi-droite d'origine, le centre de la section $X = 200$ mm, passant par le point de mesure de la sonde T_4). Sur la figure 3, nous distinguons clairement trois régimes lorsque le nombre de Hartmann augmente (Ra_{AT} diminue) : le régime turbulent, le régime oscillant puis le régime laminaire. Si pour cet enregistrement, ces régimes sont parfaitement identifiés, toutefois, il n'en demeure pas moins que la séparation entre régime turbulent et régime oscillant est rarement aussi bien marquée pour d'autres enregistrements réalisés avec d'autres nombres de Grashoff. Aucun critère fiable (par exemple, un niveau préalablement fixé sur la DSP), n'a pu être retenu pour identifier nettement et de manière reproductible, la séparation entre ces deux régimes. Le diagramme de stabilité, exposé et commenté plus loin, est donc dépourvu des informations liées au seuil critique entre régime oscillant et régime turbulent. En revanche, une reproductibilité suffisante sur l'identification de deux seuils critiques est obtenue par estimation des valeurs Ha^*_1 et Ha^*_2 du nombre de Hartmann liées respectivement à la première apparition des oscillations lors de la déstabilisation de l'écoulement et à la première extinction de toutes oscillations lors de la stabilisation de l'écoulement. Les nombres critiques Ha^*_1 et Ha^*_2 sont évalués à une incertitude expérimentale absolue de ± 0.8 .

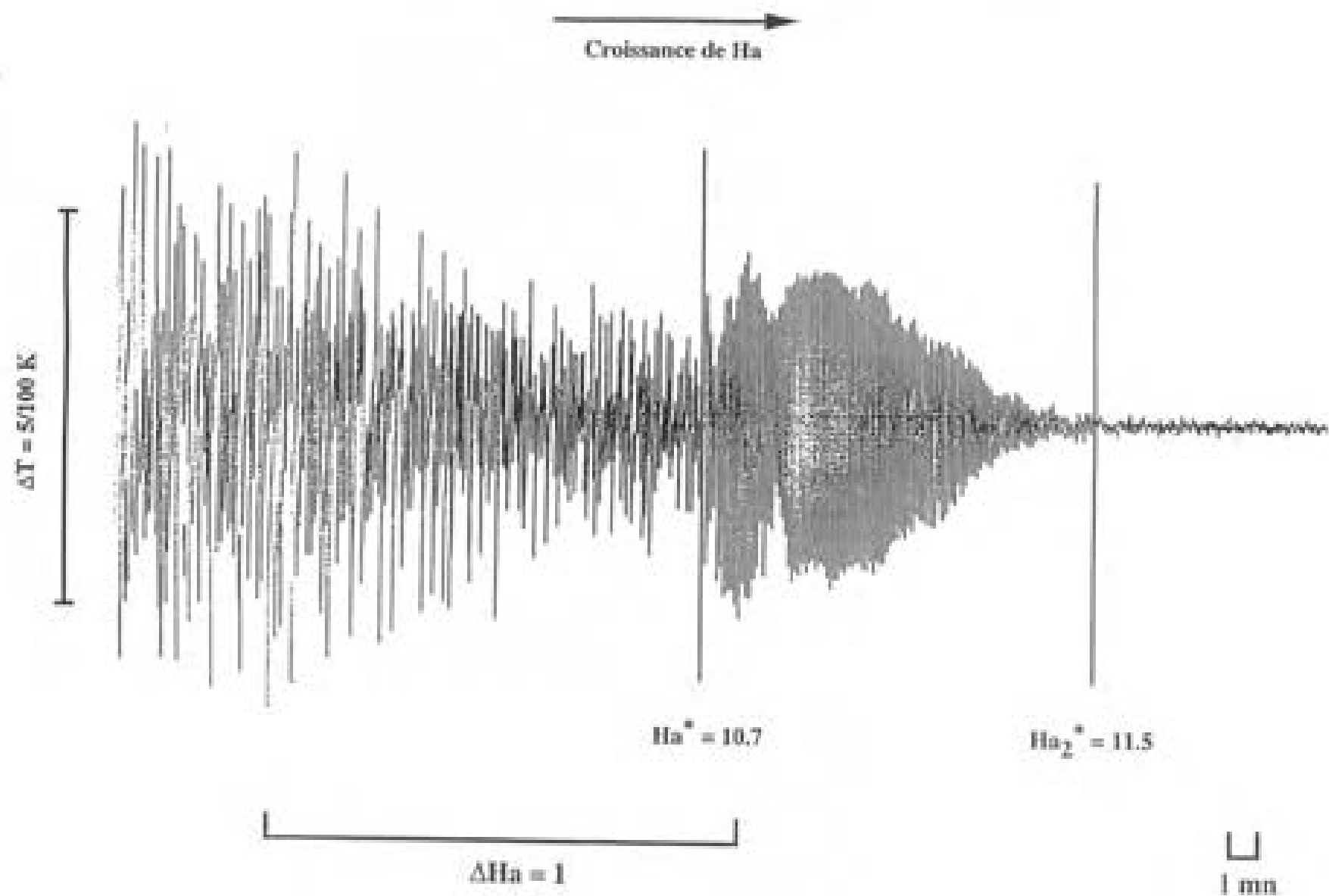


figure 3. Stabilisation typique d'un écoulement

Cette incertitude assez élevée est évaluée par répétitions de la même expérience (à nombre de Grashoff $Gr_{\Delta T}$ fixé). Un point important à mentionner lors de la réalisation de ces expériences est la grande sensibilité des instabilités instationnaires à la distribution du potentiel électrique. Le fait d'imposer au point ($X=200$ mm, $\alpha=0^\circ$) à la surface de mercure, un potentiel électrique nul (lié à la masse de l'expérience), anihile toute oscillation de température survenues aussitôt après dépassement du seuil critique de déstabilisation. La même opération effectuée cette fois au centre du front froid, favorise la présence d'instabilités instationnaires. Dans ce dernier cas, où $Gr_{15K}=8.38 \cdot 10^5$, nous avons pu mesurer $Ha^*_1=13.2$, alors qu'en configuration de potentiel électrique flottant, Ha^*_1 est trouvé égal à 10.5. Cet écart entraîne une erreur relative de 26.5% sur l'évaluation du nombre de Rayleigh critique lié à la déstabilisation de l'écoulement. Suite à ces observations, nos mesures ont été réalisées en configuration de potentiel électrique flottant.

4.2. Résultats expérimentaux observés pour tous nombres de Grashoff

Pour des sondes thermocouples pariétales localisées à plusieurs abscisses le long de la génératrice supérieure ($\alpha=90^\circ$), nous représentons sur la figure 4 les instabilités instationnaires enregistrées lors de la stabilisation de l'écoulement pour le nombre de Grashoff, $Gr_{15K}=8.38 \cdot 10^5$. Cette stabilisation est, exceptionnellement, réalisée avec un pas d'augmentation grossier sur le nombre de Hartmann (environ 0.55 au lieu de 0.021). Cette fois, le seuil critique de stabilisation de l'écoulement est obtenu pour la valeur $Ha^*_2=9.8$ (au lieu de 11.7). La conséquence du choix de l'incrément sur le contrôle de l'écoulement et les valeurs des seuils critiques s'explique pour deux raisons :

1. l'influence de la variation du flux du champ magnétique B_0 à travers le domaine fluide n'est plus négligeable (annexe 2),
2. l'influence des contributions non-linéaires dans cette transition.

Sur la figure 4 sont reportées en ordonnée à gauche, l'amplitude des fluctuations instationnaires de température en Kelvins, à droite la position axiale des thermocouples par rapport au front froid. Deux points importants sont à mentionner :

1. pour ce nombre de Grashoff Gr_{15K} , l'apparition d'un régime oscillant puis d'un régime laminaire lorsque le nombre de Hartmann augmente, survient au même instant en tous points de la cellule,
2. l'amplitude des instabilités instationnaires est maximale en $X = 8, 12, 20$ mm, dans la zone de recirculation où l'inertie est importante. Par contre, dans la couche limite visqueuse proche du front froid ($X=2$ mm), ou bien dans la zone de coeur ($X=30, 300$ mm), les termes inertiels négligeables et la prépondérance, respectivement, des termes visqueux ou de la force de Laplace, entraînent une amplitude modérée de ces instabilités instationnaires.

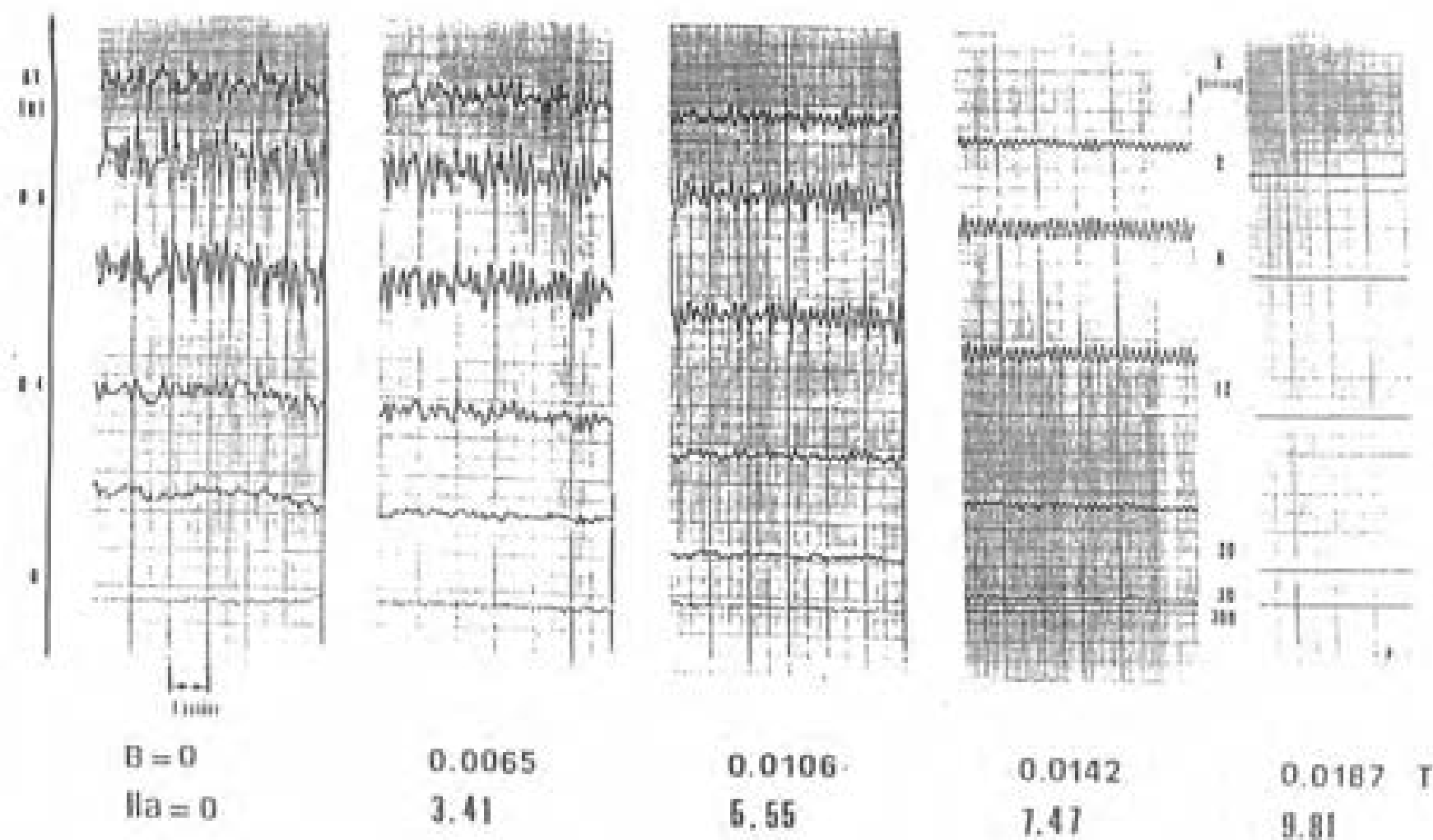


figure 4. Stabilisation de l'écoulement sur l'ensemble de la cavité
à $Gr_{15K} = 8.38 \cdot 10^5$

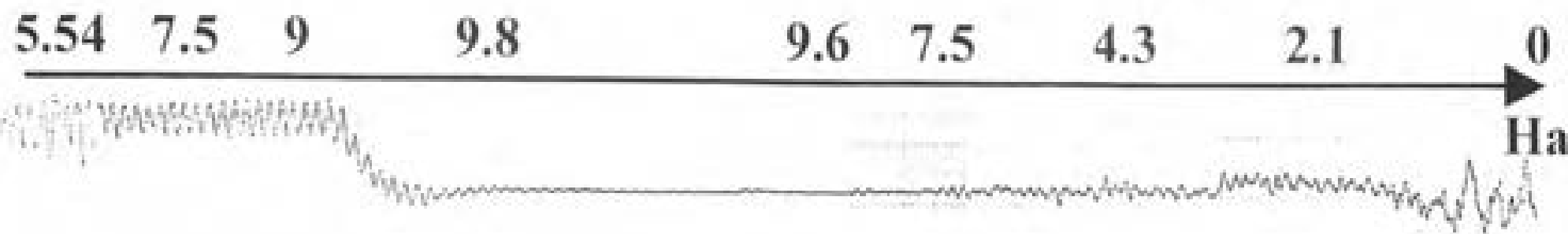


figure 5a. Stabilisation (Ha croît) puis déstabilisation (Ha décroît) de l'écoulement à $Gr_{14.7K}$.

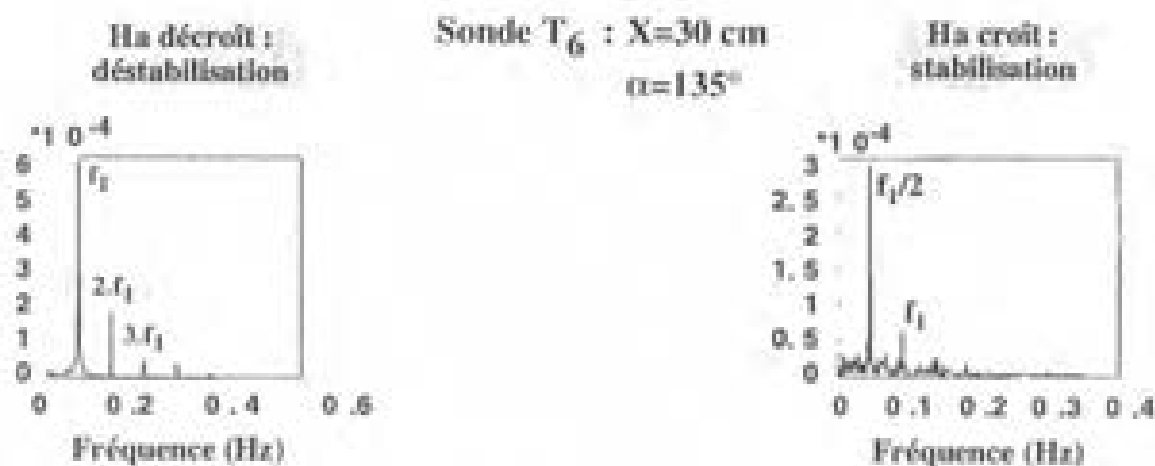


figure 5b. Spectres de Fourier dans le régime oscillant après déstabilisation et avant stabilisation de l'écoulement à $Gr_{14.7K}$ ($\approx 8.21 \cdot 10^5$).

Sur la figure 5a, la partie instationnaire de la température, mesurée par une sonde mixte pariétale (nombre de Grashoff $Gr_{AT}=14,7K$), montre consécutivement la stabilisation puis la déstabilisation de l'écoulement respectivement turbulent puis laminaire. Les valeurs différentes obtenues sur Ha^*_1 (égal à 7.5) et Ha^*_2 (égal à 9.8) mettent en évidence un phénomène d'hystérésis sur l'amplitude des instabilités oscillantes qui suggère la présence d'une bifurcation sous-critique. Un autre point important à observer sur cette figure est la différence de comportement entre stabilisation et déstabilisation : pendant la stabilisation l'amplitude du signal diminue progressivement tandis que lors de la déstabilisation le signal présente un faible saut d'amplitude à $Ha^*_1=7.5$. La transformée de Fourier est appliquée sur le signal juste après le seuil d'apparition d'oscillations régulières de température lorsque Ha augmente et que le signal n'est plus turbulent. De la même façon, la transformée de Fourier est appliquée sur le signal oscillant juste avant le seuil d'apparition de la turbulence lorsque Ha diminue. Le résultat représenté sur la figure 5b montre une différence sur les deux spectres obtenus : dans le cas où Ha augmente (phase de stabilisation de l'écoulement), la fréquence fondamentale est $f_1/2$. Cette valeur est la sous-harmonique de la fréquence fondamentale f_1 obtenue sur le spectre du signal oscillant lié à la phase de déstabilisation de l'écoulement lorsque Ha diminue. Ces phénomènes suggèrent la présence d'une bifurcation sous-critique.

4.3. Caractérisation de la première instabilité oscillante

Pour tous nombres de Grashoff Gr_{AT} , l'instabilité instationnaire systématiquement observée après franchissement de la valeur critique Ha^*_1 , possède une vitesse et une longueur d'onde identifiables grâce à la DSM qui permet l'établissement de corrélations spatiales par déplacement relatif des deux peignes de sondes thermocouples (figure 1). Le protocole expérimental adopté pour identifier cette instabilité instationnaire est le suivant :

1. à nombres de Hartmann et de Grashoff fixés, le signal obtenu, oscillant, présente une fréquence fondamentale f_1 évaluée par transformée de Fourier,

2. la possibilité d'une onde stationnaire est écartée (ou mise en évidence) de la manière suivante :

- 2.1. en positionnant les deux peignes de thermocouples dans une même section et à la même inclinaison, nous vérifions que l'instabilité oscillante ne présente pas de déphasage,

- 2.2. en positionnant les deux peignes à l'inclinaison $\alpha=90^\circ$ (plan vertical XZ) puis en les déplaçant relativement l'un par rapport à l'autre sur l'axe X de la cellule, nous établissons le fait que l'instabilité oscillante ne présente ni noeuds ni ventres oscillants. Dans le plan vertical XZ, l'instabilité oscillante n'est donc pas stationnaire et se caractérise par une vitesse c non nulle suivant l'axe X,

3. en déplaçant les deux peignes et à l'aide d'intercorrélations, la longueur d'onde λ_x de cette instabilité oscillante - qualifiée maintenant de longitudinale - est directement déterminée ; par conséquent sa vitesse l'est également grâce à la relation $c = \lambda_x f_1$.

4. finalement, en déplaçant l'un par rapport à l'autre les deux peignes pas à pas suivant l'axe X sur une distance $\lambda_x/2$, le sens de l'instabilité longitudinale oscillante dans le plan vertical longitudinal XZ est déterminé.

Ce protocole est appliqué à deux nombres de Grashoff différents : $Gr_{4,7K} = 2.62 \cdot 10^5$ et $Gr_{13K} = 8.38 \cdot 10^5$. En outre, pour le cas $Gr_{AT} = Gr_{13K}$, le sens de circulation de l'écoulement principal (circulation de Hadley) est inversé par action sur les températures de régulation des deux fronts de la cellule : dans cette configuration particulière, la DSM ne se déplace plus à partir du front chaud comme indiqué sur la figure 1 mais à partir du front froid. Cette opération permet :

1. de mettre en évidence la propriété de l'instabilité à se déplacer dans le même sens que le champ de vitesse global u (circulation de Hadley) dans les régions suivantes (voir géométrie et repère sur la figure 6) :

partie gauche supérieure de la cellule : $-100\text{mm} < X < 0$ et $Z > 0$,

partie inférieure de la cellule pour $0 < X < 100$ et $Z < 0$,

2. de mesurer directement la longueur d'onde λ_x et la fréquence f_1 soit la vitesse c de l'instabilité.



Figure 6. Déplacement de l'instabilité oscillante longitudinale dans deux régions spécifiques de la cellule.

4.3.1. Comment expliquer la présence de cette instabilité oscillante longitudinale 3-D ?

Une première explication, assez naturelle, vient à l'esprit. On peut penser que cette instabilité oscillante est le fruit de tourbillons advectés dans chacune des parties supérieure et inférieure de la cellule (schéma disponible sur la figure 7).

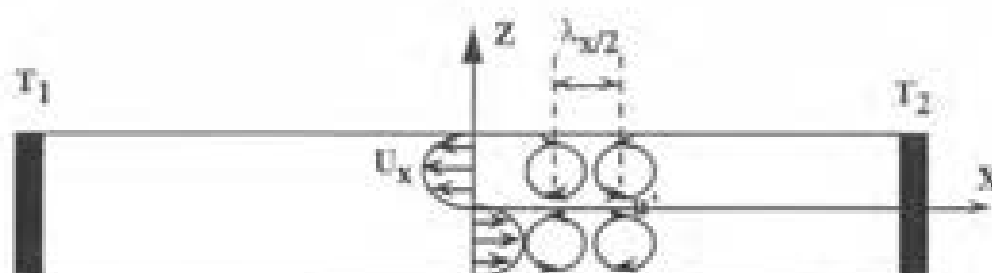


Figure 7. Une première explication.

Le tableau qui suit rassemble pour les deux nombres de Grashoff expérimentaux testés, les valeurs mesurées de λ_z , f_1 et c , caractérisant cette instabilité oscillante longitudinale.

Caractéristiques de l'instabilité oscillante longitudinale 3-D	Détermination de la composante axiale du champ de vitesse u dans la zone de régime établi
Gr_{15K} $\lambda_z = 50 \pm 10 \text{ mm}$, $f_1 = 87 \pm 1 \text{ mHz}$ $c = 4.35 \pm 0.9 \text{ mm/s}$	$Gr_{14.7K}$ $U_x = 4 \pm 0.5 \text{ mm/s}$ avec le potentiel électrique $U_x = 10 \pm 1 \text{ mm/s}$ avec la distribution de température $T_{200mm}(\alpha)$
$Gr_{4.7K}$ $\lambda_z = 60 \pm 5 \text{ mm}$, $f_1 = 42 \pm 1 \text{ mHz}$ $c = 2.5 \pm 0.25 \text{ mm/s}$	Gr_{4K} $U_x = 2.5 \pm 0.5 \text{ mm/s}$ avec la distribution de température $T_{200mm}(\alpha)$

La vitesse c de l'instabilité est comparée à l'ordre de grandeur de la composante axiale maximale U_x associée à la vitesse globale de l'écoulement. Cet ordre de grandeur est évalué suivant le procédé présenté dans le chapitre II, c'est à dire, à partir des distributions de température moyennées $T_{200mm}(\alpha)$ et de la différence maximale de potentiels $\Delta\Phi$, mesurées dans la section centrale de la cellule pour les nombres de Grashoff Gr_{4K} et $Gr_{14.7K}$ et des nombres de Hartmann voisins de Ha^* . La vitesse de l'instabilité longitudinale oscillante 3-D et la vitesse U_x seraient du même ordre de grandeur si l'estimation réalisée à partir de la distribution de

température $T_{100\text{mm}}(\alpha)$ pour le cas $Gr_{\Delta T} = Gr_{15K}$ était écartée. Isolons par la pensée un tourbillon de taille $l = \lambda_x/2$, advecté par l'écoulement global à la vitesse U_x . On peut estimer que la contribution de ce tourbillon au signal de température possède une amplitude de l'ordre de :

$$\Theta = \Theta_0 (u' l / \alpha) \quad (V.2)$$

où α est la diffusivité thermique et $(u' l / \alpha)$, le nombre de Péclet associé au tourbillon. L'échelle Θ_0 qui nous semble la mieux justifiée est l'écart de température dans la moitié de la section centrale, c'est à dire la demi-amplitude de la sinusoïde interpolant la distribution de température moyennée dans la section centrale de la cellule (cf. chapitre II) : $\Theta_0 = 1K$. Comme pour un écoulement turbulent, l'ordre de grandeur de la fluctuation de vitesse u' associée au tourbillon peut être estimée par l'ordre de grandeur $u' = U_x/10$. Pour les nombres de Grashoff impliqués dans notre étude, u' est de l'ordre de 0.1 à 1 mm/s. La taille caractéristique l des tourbillons à considérer est de l'ordre de 1 à 10 mm. La relation (V.2) fournit alors une estimation de l'ordre de grandeur de l'amplitude des oscillations à laquelle on pourrait s'attendre : $\Theta = 0.1$ à 10 K. Ce mécanisme semblerait donc largement suffisant pour entretenir des fluctuations de température de l'ordre de 0.05K. **Cependant plusieurs observations complémentaires invalident cette interprétation.** Dès franchissement du seuil critique, l'instabilité oscillante est captée en même temps par des thermocouples positionnés à la fois dans le plan vertical longitudinal XZ et dans le plan horizontal longitudinal XY du cylindre. Dans ce plan horizontal, la vitesse axiale de l'écoulement de base s'annule pour des raisons de symétrie. Un nombre de Rayleigh effectif $Ra_{\Delta T} (= Pr Gr_{\Delta T} / Ha^2)$ plus important est nécessaire afin que **quelle que soit la sonde thermocouple choisie dans la section centrale de la cavité (proche de la paroi ou dans le centre)**, une oscillation de température se dégage du bruit électronique. Dans le plan XZ, l'amplitude de l'instabilité oscillante est invariante avec la hauteur Z. Le fait que le champ de vitesse (principalement axial si la recirculation transversale est négligée), s'annule au centre de la cellule ou au voisinage des parois ou plus généralement dans le plan horizontal transversal, n'entraîne pas une diminution brutale de l'amplitude des oscillations de température mesurées. Finalement, l'interprétation retenue qui nous semble la plus justifiée, est la présence d'une onde longitudinale progressive dans le plan XZ. A cette onde, dont le déplacement respecte le caractère centro-symétrique de l'écoulement, est donc associée la célérité c . Bojarevics [1994] puis Kaddeche [1995] prédisent l'apparition de rouleaux oscillants longitudinaux 3-D (modes transversaux) par le biais d'une étude de stabilité linéaire. Bien que l'expérience suggère que la transition se présente d'abord sous la forme d'une bifurcation **sous-critique** donnant lieu à l'onde oscillante **longitudinale**, la démarche analytique de ces auteurs nous semble plus proche de nos observations dans la mesure où des modes transversaux sont également observés (voir paragraphes suivants). En revanche, la prédiction précise du seuil critique d'apparition de cette onde oscillante relève d'une théorie non-linéaire.

4.3.2. Influence sensible d'instabilités stationnaires pour des nombres de Grashoff Gr_{3T} plus importants

Pour des nombres de Grashoff modérés, la transition présente deux propriétés remarquables :

1. elle se découpe suivant trois régimes clairement identifiés : un régime laminaire, oscillant et turbulent,
2. la stabilisation (ou bien la déstabilisation) apparaît au même nombre de Hartmann Ha^*_2 (ou bien Ha^*_1) en tous points de la cellule.

En revanche, un comportement très différent est mis en évidence lors de transitions réalisées avec des nombres de Grashoff imposés plus grands que $Gr_{13K} \approx 8.4 \cdot 10^5$. Dès que cette valeur est franchie, un phénomène de fenêtres de restabilisation de l'écoulement établi est observé aux points où sont localisés les sondes thermocouples T_1 ($x=200$ mm, $\alpha=90^\circ$) et T_4 ($x=300$ mm, $\alpha=90^\circ$) appartenant à la DSM. Sur la figure 8a est représentée la partie instationnaire de la température mesurée par la sonde T_4 pendant une phase de stabilisation de l'écoulement obtenue lorsque le nombre de Hartmann augmente (de la gauche vers la droite), pour un nombre de Grashoff $Gr_{20.1K} \approx 1.13 \cdot 10^6$. Sur cette figure, on distingue nettement deux fenêtres d'oscillations ($Ha=13.65-18$ et $Ha=18.5-21.5$) survenant après deux stabilisations successives de l'écoulement ($Ha=12.5-13.65$ et $Ha=18-18.5$).

Seule la première fenêtre d'oscillations ($Ha=13.65-18$) est observée sur l'enregistrement de la sonde T_1 localisée entre le centre et l'extrémité chaude, dans la zone de régime établi. Ce phénomène est donc dépendant de l'espace (position des sondes dans la cellule).

Notons la présence prépondérante ou non d'une arche harmonique sur les signaux oscillants qui se manifeste par un noircissement du signal oscillant sur la figure 8a. Ce phénomène, expliqué par la suite au §4.5, est justifié par la présence d'un couplage non linéaire entre le champ de température et le champ de vitesse. Ce phénomène de restabilisation de l'écoulement, observé uniquement pour des nombres de Grashoff très grands (gamme précisée ci-dessus), pourrait être attribué à de l'intermittence. Manneville [1991] fournit une introduction au phénomène d'intermittence qui ne peut apparaître qu'à la suite d'une bifurcation sous-critique (cas de cette expérience).

Intermittence temporelle ?

Quelque soit le type d'intermittence temporelle impliquée (type I, II ou III), il semblerait que les fenêtres de restabilisation, ou bien les régimes oscillants précédant les fenêtres de restabilisation, soient de durée trop importante : d'après les résultats obtenus dans le cas de l'intermittence temporelle en convection Rayleigh-Bénard, les régimes instationnaires

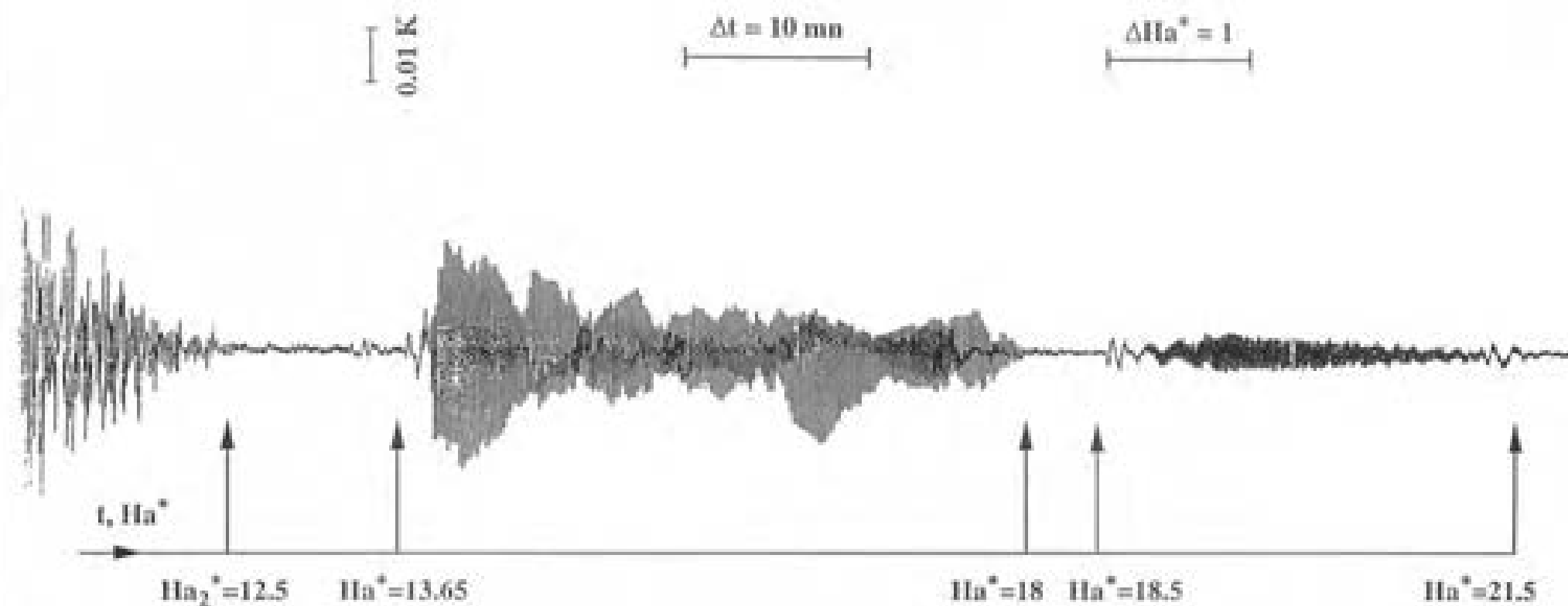


figure 8a. Partie instationnaire du signal de température mesurée par la sonde thermocouple T_4 pendant la stabilisation de l'écoulement à $Gr_{20,2K}$: apparition de fenêtres d'oscillations.

s'apparentent davantage à des bouffées. Afin d'apporter une réponse définitive à cette question, la même expérience a été reconduite mais la décroissance du nombre de Hartmann par petits pas a été stoppée en pleine phase de stabilisation : après huit heures d'attente, aucune oscillation n'a pu être enregistrée.

Intermittence spatiale ?

La célèbre expérience de Reynolds (basée sur l'écoulement de Poiseuille dans un conduit) fournit un exemple d'intermittence spatiale. Ce phénomène, après une bifurcation sous-critique de l'écoulement, se présente sous la forme de tâches tourbillonnaires rapidement advectées par l'écoulement global. Une fois de plus, si le champ de vitesse est mesuré, par vélocimétrie laser par exemple, le signal de vitesse obtenu est davantage caractérisé par des bouffées instationnaires.

Finalement, l'explication des fenêtres d'oscillations et de stabilisation observées dans cette expérience ne relève pas d'un phénomène d'intermittence mais de la présence d'instabilités stationnaires. Plus exactement, l'interprétation que nous proposons est basée sur la présence concomitante :

1. de cellules convectives marginales stationnaires 2-D prédites par Bojarevics [1994] et Kaddeche [1995] qui sont dues aux contraintes de cisaillement maximisées dans le plan vertical longitudinal XZ,
2. de l'instabilité oscillante longitudinale 3-D largement décrite dans les pages précédentes.

La cellule impliquée dans l'expérience MASCOT possède un élanement privilégié suivant la direction axiale X. Cette anisotropie permet aux modes 2-D (axiaux) associés aux instabilités stationnaires d'évoluer librement en nombre de plus en plus important lorsque le nombre de Hartmann décroît.

L'effet de confinement par la section ne limite prioritairement que les modes 3-D de rouleaux oscillants. Cette explication qualitative n'est pour l'instant qu'une conjecture. Afin de la consolider, il nous paraît opportun de commenter les résultats d'une expérience antérieure à ces enregistrements et dont le protocole s'était déroulé de la façon suivante :

1. pour un écart de température imposé entre les deux fronts de 13.5K, le nombre de Hartmann est augmenté puis diminué avec un pas quelconque sans aucune précaution d'aucune sorte jusqu'à ce qu'un signal oscillant de température soit détecté par une sonde thermocouple installée sur la DSM,
2. la DSM est déplacée uniquement dans le plan vertical longitudinal XZ suivant son axe X à l'inclinaison $\alpha=90^\circ$,

3. pour une abscisse choisie, avant chaque enregistrement du signal, un temps d'attente d'environ 15 minutes est respecté afin de s'assurer qu'aucune perturbation mécanique de l'écoulement n'est engendrée.

La figure 8b présente quatre enregistrements, jugés suffisamment typiques, de signaux instationnaires captés par la sonde thermocouple T_4 . La forme oscillante de ces signaux évolue fortement en fonction de l'abscisse ; on peut remarquer la présence plus ou moins marquée d'une arche additionnelle, harmonique du signal, ou bien l'extinction totale des oscillations de température survenant à une abscisse bien précise ($X=310$ mm). Cette extinction se manifeste par le fait qu'entre le début de l'enregistrement du signal à $t = 0$ s et le temps $t \sim 100$ s, l'amplitude du signal ne dépasse pas $3 \cdot 10^{-4}$ V (soit $2.2 \cdot 10^{-3}$ K) : ce niveau correspond au bruit électronique de la chaîne de traitement analogique des signaux. Plus intéressante est l'interruption soudaine de ce faible niveau d'amplitude : pour un temps légèrement supérieur à 100 s, une courte perturbation mécanique (liée à une secousse accidentelle de la cellule) est infligée à l'écoulement et engendre une réapparition brutale des oscillations dont l'amplitude diminue ensuite lentement par dissipation visqueuse. De part et d'autre de cette abscisse, les oscillations de température sont peu sujettes aux perturbations mécaniques mais beaucoup plus, bien entendu, aux perturbations liées à la régulation des températures aux fronts de la cellule. Cette sensibilité des oscillations de température aux défauts de régulation thermique des fronts n'est pas étonnante puisque l'onde longitudinale oscillante 3-D prend son origine à partir d'un nombre de Prandtl non nul. La sensibilité de l'extinction des oscillations de température aux chocs mécaniques ne surprend pas non plus puisque les cellules convectives marginales 2-D stationnaires sont uniquement liées au champ de vitesse : selon Kaddeche [1995], elles existent aussi lorsque le nombre de Prandtl est identiquement nul. L'interprétation avancée quant à l'extinction observée sur cette figure est liée au fait que le capteur, positionné en $X=310$ mm, est exactement centré sur une cellule convective marginale stationnaire. En s'éloignant ne serait-ce que de 10 mm de ce point, par exemple en $X=320$ mm ou $X=299$ mm, des oscillations de température sont retrouvées avec une amplitude supérieure à $1.17 \cdot 10^{-3}$ K.

En conclusion, en s'appuyant sur les développements analytiques de Kaddeche [1995] et Bojarevics [1994], les résultats expérimentaux représentés sur les figures 8a et 8b nous semblent suffisants pour consolider l'interprétation selon laquelle au delà de Gr_{15K} , valeur non incluse, des instabilités stationnaires 2-D d'axe Y interagissent fortement avec des instabilités oscillantes 3-D dans une gamme de mêmes nombres de Hartmann.

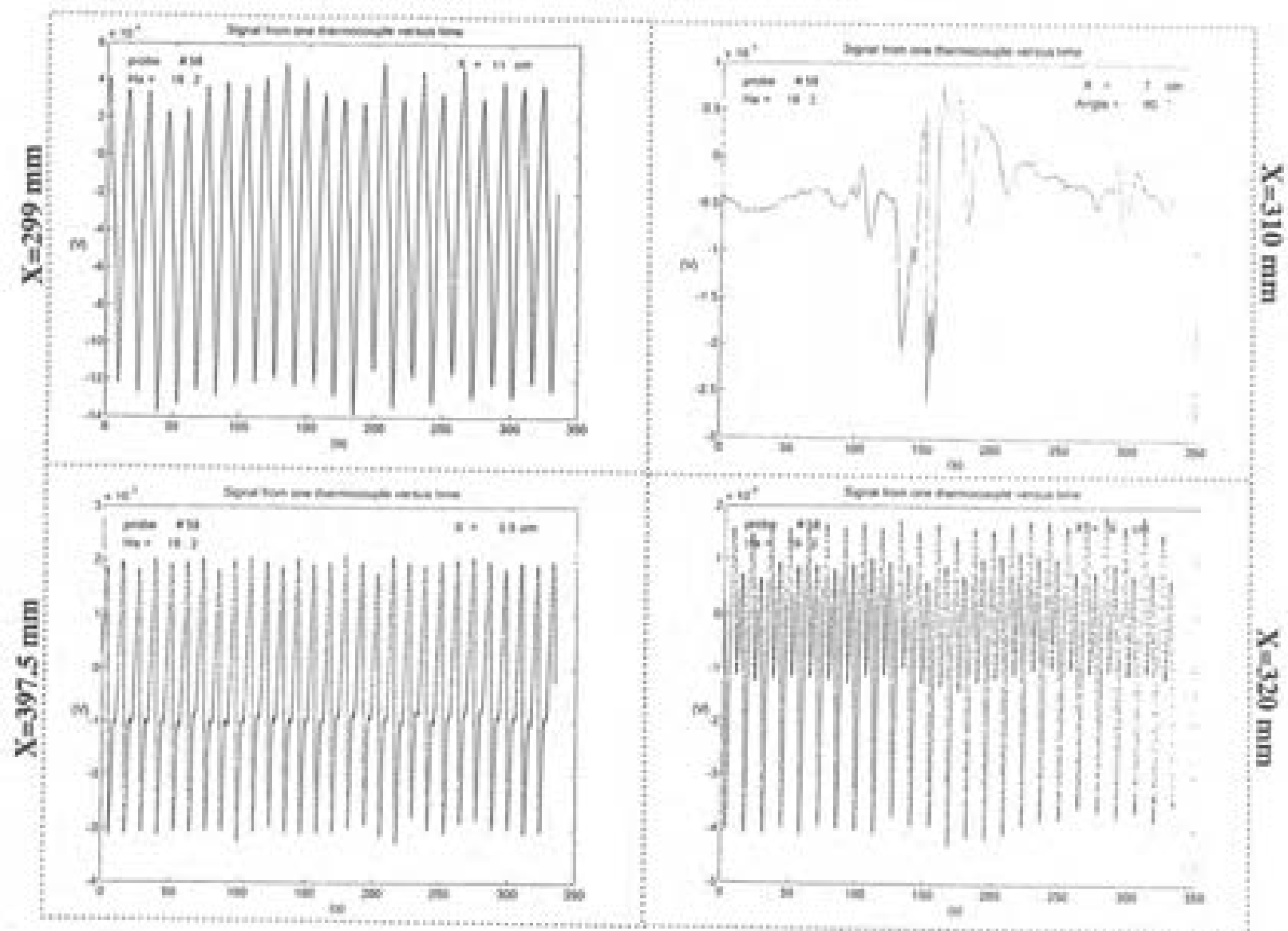


figure 8b. Partie instationnaire du signal de température mesurée par la sonde thermocouple T_4 en fonction de la position X sur l'axe de la cellule dans le plan vertical (XZ) avec $(Gr_{15.5K}, Ha)=(8.67 \cdot 10^5, 19.2)$.

4.4. Diagramme de stabilité

Nous proposons un diagramme général de stabilité pour les instabilités instationnaires observées lors de la transition laminaire-turbulent dans la zone de régime établi de la cellule MASCOT. Pour réaliser ce diagramme (figure 9), les sondes ont été positionnées dans le plan vertical longitudinal XZ où l'instabilité oscillante est captée en priorité aux abscisses $X = 300$ mm et $X = 200$ mm (centre de la cellule), respectivement, par les sondes T_1 et T_2 .

4.4.1. Construction du diagramme

Le protocole explicité dans le paragraphe 3.2 est mis en application. Nous imposons un écart de température ΔT entre les deux fronts de la cellule. Cet écart est imposé avec une précision de ± 0.01 K sur un temps aussi long que souhaité mais en revanche, il n'est mesuré qu'avec une précision estimée à $\pm 1/10$ K. En effet deux facteurs limitants interviennent : la mesure est effectuée de manière conventionnelle avec un thermomètre à mercure affichant une précision de ± 0.05 K, et réalisée en des points éloignés des fronts sur le circuit de régulation d'eau afin de ne pas perturber la régulation localement. Comme précisé au début de ce chapitre, seul le champ magnétique produit par l'électro-aimant est piloté par un micro-ordinateur. En conséquence, le paramètre de contrôle de l'expérience est le nombre de Hartmann Ha^* et le diagramme de stabilité est construit dans le plan $(Gr_{\Delta T}, Ha^*)$. L'incertitude absolue de l'ordre de 0.8 sur le nombre de Hartmann est due aux difficultés de reproductibilité déjà évoquées au paragraphe 3.2. Nous représentons le couple de points $(Gr_{\Delta T}, Ha^*_1)$ et $(Gr_{\Delta T}, Ha^*_2)$ respectivement associés au nombre de Hartmann critique Ha^*_1 lors de la première déstabilisation de l'écoulement (première apparition des oscillations de température) et au nombre de Hartmann critique Ha^*_2 lors de la première stabilisation de l'écoulement (extinction de toute oscillation de température).

Sur ce diagramme, nous avons fait figurer les fenêtres de restabilisation qui apparaissent avant une déstabilisation définitive de l'écoulement (ou après une première déstabilisation), ainsi que les fenêtres d'oscillations, qui apparaissent avant une stabilisation définitive de l'écoulement (ou après une première stabilisation).

Les travaux théoriques réalisés par Kaddeche [1995] dans le cadre d'une étude linéaire de stabilité, ont mis en évidence le fait que pour un nombre de Prandtl fixé, le seuil critique d'apparition des instabilités 2-D stationnaires (obtenu cette fois pour un nombre de Grashoff critique $Gr^*_{\Delta T}$) est guidé par la loi : $Gr^*_{\Delta T} \sim \exp(Ha^2/25)$, tandis que le seuil critique d'apparition d'oscillations 3-D transversales suit la loi : $Gr^*_{\Delta T} \sim Ha^2$. Dans le cas où le nombre de Hartmann est modéré, il est également prédit que les modes 2-D et 3-D apparaissent pour le même nombre de Grashoff critique. Si le nombre de Hartmann est élevé, le nombre de Grashoff critique $Gr^*_{\Delta T}$ est plus grand et les modes 3D oscillants sont les modes les plus instables.

Bojarevics [1994], en prenant en compte la largeur finie d'une cellule parallélépipédique, prédit une variante de ce scénario. Pour des nombres de Hartmann modérés, soit des nombres de Grashoff critique $Gr_{\Delta T}^*$ de l'ordre de $10^4 - 10^5$, les modes stationnaires 2-D sont trouvés plus instables que les modes 3-D oscillants. Une gamme mixte pour des nombres de Grashoff plus élevés et approximativement centrés sur la valeur $Gr_{\Delta T}^* \sim 10^6$, existe, pour laquelle les deux modes stationnaires et instationnaires peuvent coexister.

En vertu de ces deux prédictions théoriques, en légère contradiction quant à l'ordre d'apparition des deux types d'instabilités, nous nous sommes attachés lors de la confection du diagramme de stabilité, à détecter avec précaution les fenêtres de restabilisation et d'oscillations et surtout à distinguer les seuils de **première** apparition ($Ha = Ha_1^*$) ou de **première** disparition ($Ha = Ha_2^*$) des instabilités oscillantes. Rappelons que dans la gamme des nombres de Grashoff $Gr_{\Delta T}$ modérés, les premières apparition et disparition des oscillations de température sont définitives.

4.4.2. Analyse du diagramme de stabilité

Les résultats expérimentaux de Hurle *et al* [1974] sur la loi de stabilisation des instabilités oscillantes :

$$Gr_{\Delta T}^* \sim Ha^2,$$

est également confirmée par nos résultats expérimentaux puisque le seuil critique de première disparition des oscillations Ha_2^* respecte, aux erreurs de mesure près, la loi $Ha_2^* \sim (Gr_{\Delta T}^*)^{1/2}$. La théorie linéaire de stabilité développée par Kaddeche [1995] prédit également cette loi d'échelle mais pour des modes oscillants suivant Y. Par anticipation sur la suite de ce chapitre, précisons que les modes oscillants transversaux (suivant Y) et longitudinaux (suivant X), de même fréquences f_1 , apparaissent et disparaissent en même temps. Ce résultat expérimental semble indiquer - paradoxalement - que l'analyse linéaire de stabilité de l'écoulement développée par Kaddeche [1995] (ou bien Bojarevics [1994]) décrirait le retour vers le régime laminaire sur la branche bifurquée de la transition sous-critique associée aux oscillations longitudinale et transversale.

Dans cette investigation expérimentale, une nette différence de comportement dans la transition est observée entre les nombres de Grashoff modérés et les nombres de Grashoff importants ($Gr_{\Delta T} \sim 10^6$) qui sont associés à des nombres de Hartmann critiques, respectivement, petits ($Ha \sim 1$) et plus grands ($Ha \sim 10$). Cette différence prend la forme de fenêtres d'oscillations et de restabilisation dans la région désignée, région B, sur le diagramme de stabilité. La région A désigne la région où d'une part, les nombres de Hartmann sont modérés et où d'autre part, l'hystérésis n'est pas perturbé par la présence de fenêtres. Précisons les conclusions qui nous semblent essentielles dans la présence de ces régions :

Région A

L'hystérésis apparaît distinctement. L'absence des fenêtres d'oscillations est la signature d'une absence ou d'une très faible évolution des instabilités stationnaires, qui si elles existent, sont quasi-gelées dans l'espace, lors du processus de stabilisation (augmentation du nombre de Hartmann Ha).

Région B

Appliquons l'analyse linéaire de Bojarevics [1994] à la transition laminaire-turbulent de l'écoulement dans la région B. Les fenêtres de restabilisation ou d'oscillations sont alors interprétées comme la trace d'une évolution active du nombre de modes 2-D stationnaires pendant la transition. Ces modes stationnaires 2-D interagissent avec les modes oscillants 3-D. Nos résultats expérimentaux ne permettent pas de savoir si dans cette région les instabilités stationnaires 2-D apparaissent avant ou après les instabilités instationnaires 3-D lors de la déstabilisation ou de la stabilisation de l'écoulement. Mais le pronostic de Bojarevics n'est pas en contradiction avec cette interaction. Néanmoins, en dépit de cet accord qualitatif, l'étude plus détaillée de la transition à nombre de Grashoff $Gr_{\Delta T}$ importants relève, d'une part, d'une analyse non-linéaire de stabilité et, d'autre part, d'un formalisme d'enveloppe (Manneville [1991]) afin de prendre en compte une dépendance spatiale de la transition, faible, mais néanmoins présente.

Pour conclure cette analyse, il semble que la première déstabilisation instationnaire de l'écoulement laminaire (apparition des premières oscillations de température) soit guidée par la loi linéaire $Ha^*_1 \sim Gr^*_{\Delta T}$. Ce diagramme ne permet pas de statuer sur le caractère supercritique ou sous-critique de la transition guidant les instabilités 2-D stationnaires. Mais dans tous les cas, les résultats expérimentaux suggèrent que les modes stationnaires 2-D apparaissent avant ou en même temps que les modes instationnaires 3-D lorsque le nombre de Grashoff $Gr_{\Delta T}$ est, respectivement, de l'ordre de 10^5 et 10^6 .

4.5. Transition à nombre de Grashoff modéré

L'étude de la transition à faible nombre de Grashoff semble moins difficile : elle présente une faible interaction entre les instabilités stationnaires (si elles sont présentes) et les modes 3-D oscillants. Il nous a donc semblé pertinent, dans le cadre de cette étude, de pousser plus avant l'investigation de la transition à faible nombre de Grashoff tant sur le plan mécanique, via la détection puis l'identification d'ondes instationnaires, que sur le plan du formalisme associé au domaine du chaos temporel tel qu'il est présenté dans les monographies de Bergé *et al* [1992] ou bien de Manneville [1991]. Nous déterminons, pour les aspects instationnaires, l'identité des bifurcations constituant cette transition afin de fournir des guides à l'éventuel théoricien désireux de la décrire. Pour cette investigation expérimentale, notre choix s'est porté sur un nombre de Grashoff égal à $Gr_{\Delta T,K} = 2.62 \cdot 10^5$.

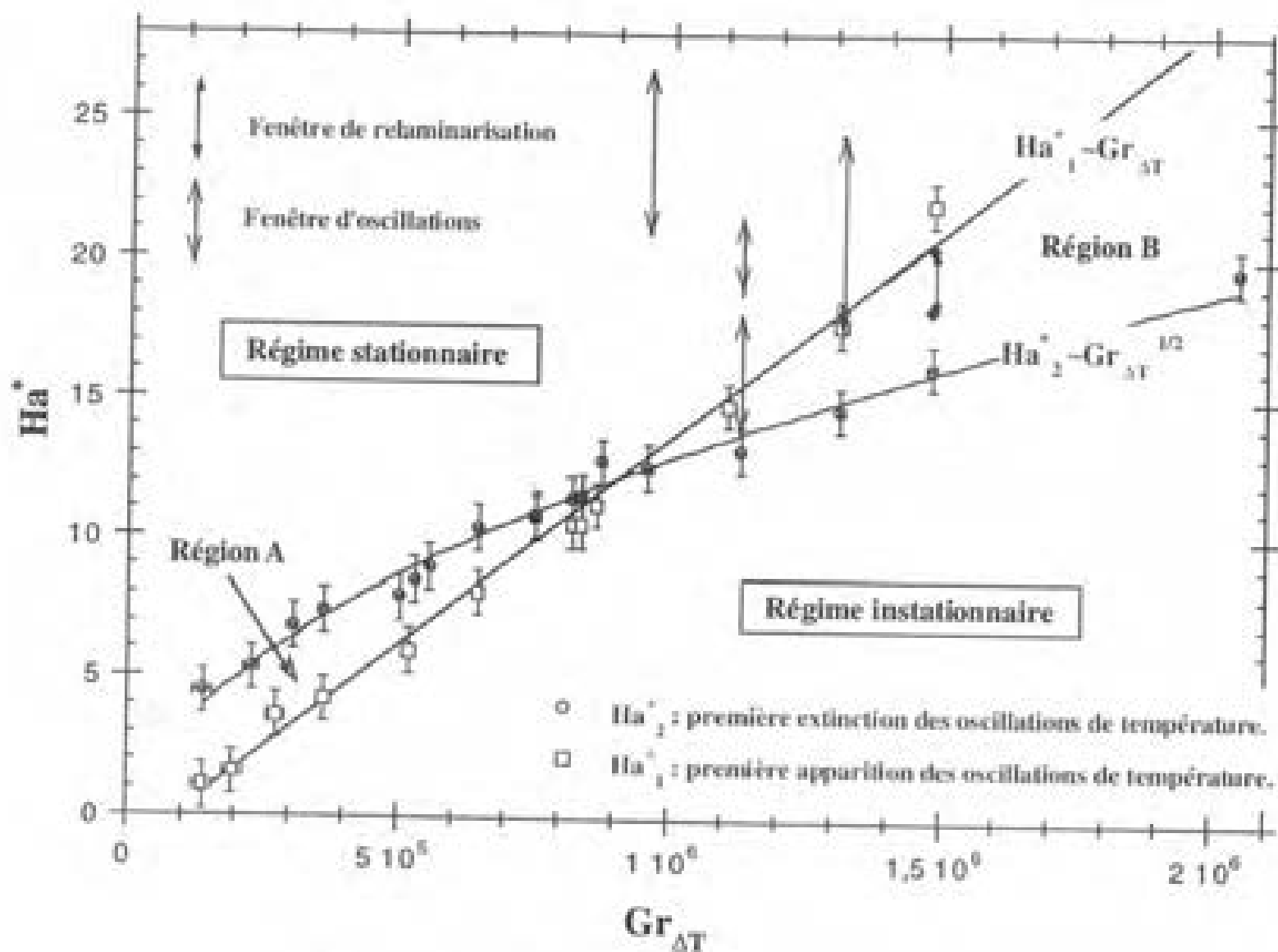


Figure 9. Diagramme des instabilités instationnaires dans le plan $(Gr_{\Delta T}^*, Ha^*)$

4.5.1. Etude de la transition à $Gr_{4,7K}$: caractérisation par les ondes

Dans les pages précédentes, l'oscillation longitudinale 3-D est largement décrite. Cette instabilité instationnaire est observée sur la totalité de la cavité pour tous nombres de Grashoff, $Gr_{\Delta T}$. Nous nous concentrons sur la zone de régime établi. Les résultats expérimentaux présentés ci-après sont le fruit de deux expériences.

1. Une expérience de transition menée dans les deux sens, laminaire-turbulent et turbulent-laminaire. La figure 10 ci-dessous précise les positions des sondes T_1 - T_7 installées sur la DSM. Les acquisitions des signaux ont été effectuées avec une synchronisation effective sur chacun des triplets de sondes suivants : $\{T_7-T_6-T_3\}$ et $\{T_7-T_6-T_3\}$. Les sondes T_1 à T_6 sont contenues dans le même plan central de la cavité, le plan vertical transversal YZ.

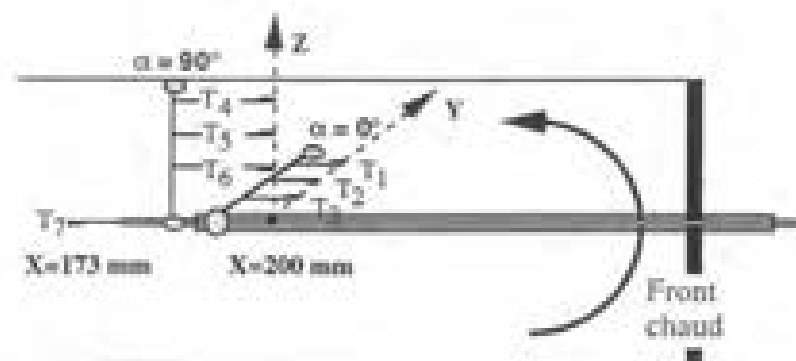


Figure 10. Positionnement de la DSM pour l'étude de la transition vers le chaos temporel.

2. Une expérience réalisée avec un nombre de Hartmann fixé à 2.35 pour lequel toutes les instabilités instationnaires identifiées dans cette transition sont présentes. Pour cette expérience, l'objectif consiste à déterminer les principales caractéristiques de ces instabilités.

4.5.1.1. Onde oscillante transversale

Deux instabilités oscillantes d'égales fréquences apparaissent en même temps lorsque le nombre de Hartmann Ha^* descend jusqu'à la valeur critique $Ha^*_1 = 3.63$ qui déclenche le début de la transition. La première instabilité est l'onde oscillante longitudinale 3-D amplement décrite au §4.3. ; la deuxième est une onde oscillante contenue essentiellement dans le plan longitudinal horizontal XY. Des enregistrements synchronisés pour toutes les sondes sont réalisés à $Ha = 2.35$ et représentés sur la figure 11 : ils mettent en évidence deux propriétés caractéristiques de cette onde.

1. Sa phase varie fortement suivant l'axe Y et aucunement suivant l'axe X :

Lorsque dans le plan XY, le peigne n°1 de sondes $\{T_1-T_2-T_3\}$ et le peigne n°2 de sondes $\{T_4-T_5-T_6\}$ sont inclinés respectivement à 0° et 180° , une parfaite opposition de phase est constatée entre les sondes positionnées symétriquement de part et d'autre du plan vertical longitudinal. Aucun déphasage suivant l'axe X de la cellule n'a pu être mis en évidence sur une distance de 20 cm autour du centre de la cellule. Cette onde est donc oscillante et transversale. Si l'opposition de phase est nette de part et d'autre du plan vertical longitudinal XZ de la cellule, en revanche, sur chacun des peignes, aucun déphasage n'est repéré entre trois sondes distantes entre elles de 3 mm. Cette onde transversale oscillante s'identifie à une onde stationnaire puisqu'elle ne présente pas de célérité. Cette interprétation est confortée par la diminution brutale de l'amplitude de cette onde près des parois. En effet, en tenant compte du décalage des deux échelles de température sur la figure 11, il apparaît que l'amplitude des oscillations détectées par la sonde T_4 éloignée de 4 mm de la paroi longitudinale, est 6 fois moins importante que les amplitudes des oscillations de température détectées par les sondes T_3 et T_6 respectivement localisées à 7 et 10 mm de la paroi. Cette observation conduit à formuler l'hypothèse de la présence de trois noeuds et de deux ventres oscillants. Finalement, une onde stationnaire oscillante transversale est détectée dans toute section localisée en zone de régime établi.

2. Son extinction intervient dans des secteurs angulaires précis :

Comme prévu, l'amplitude de cette onde oscillante transversale décroît lorsque l'inclinaison des peignes se rapproche du plan vertical longitudinal XZ. Deux petits secteurs angulaires existent avec le couple $(Gr_{4,7K}, Ha=2.35)$, pour lesquels ni l'oscillation longitudinale 3-D ni cette oscillation transversale ne présentent une amplitude détectable. Ces secteurs correspondent à des angles appartenant grossièrement aux intervalles $[70^\circ, 80^\circ]$ et $[100^\circ, 110^\circ]$.

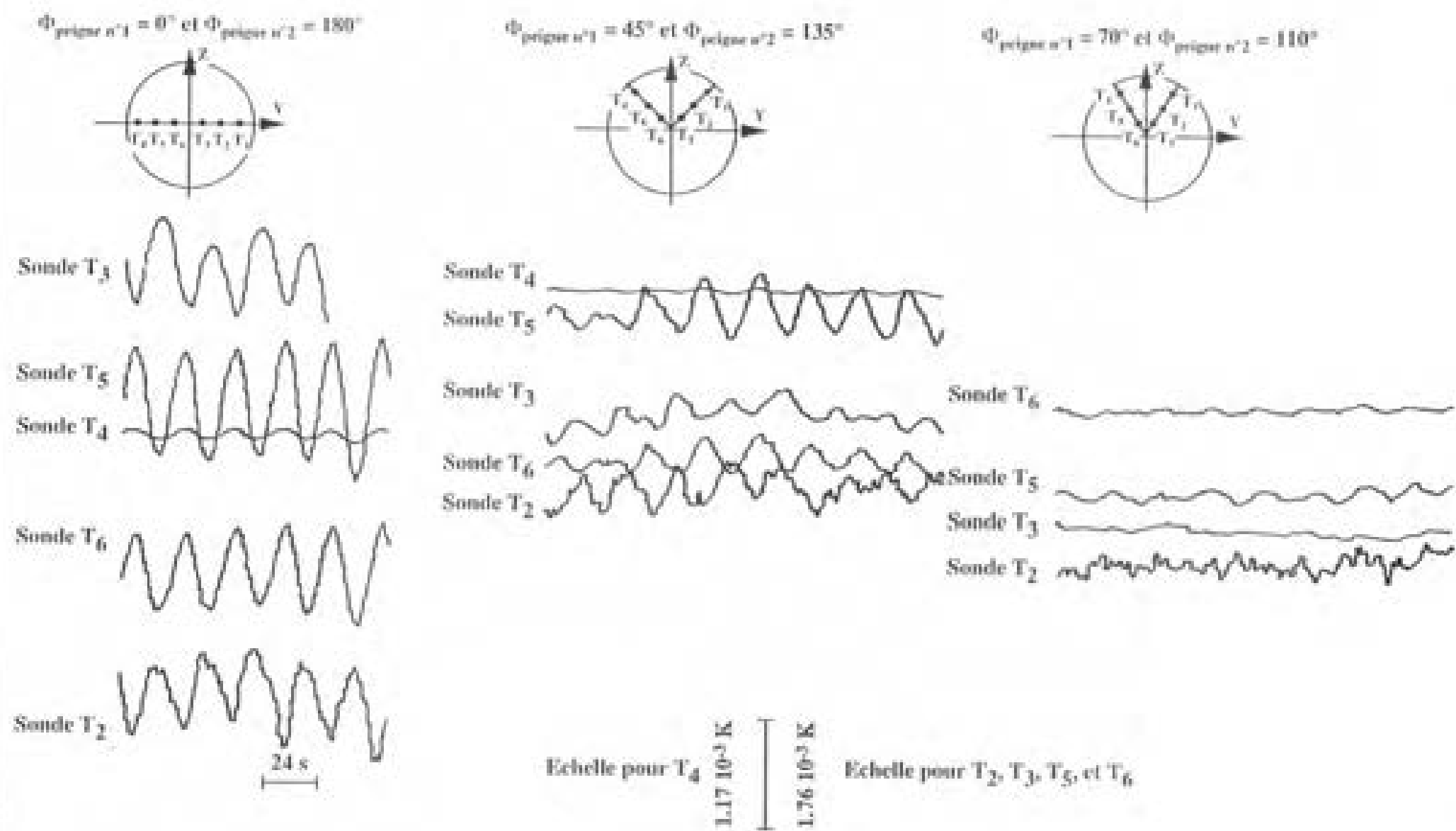


figure 11. Dépendance de l'onde transversale oscillante en fonction de l'angle des capteurs ($Ha = 2.35$).

Il est établi que la fréquence d'oscillation des ventres de l'onde oscillante transversale est égale à la fréquence f_1 de l'onde 3-D oscillante longitudinale. Ce résultat n'est pas surprenant si la symétrie quadripolaire des quatre vortex est prise en compte. En effet, un couplage non-linéaire entre les champs de température T et de vitesse transversale u_\perp intervient via le terme de convection $[(u_\perp \cdot \nabla)T]$ de l'équation de l'énergie. Lors de la transition, le nombre de Rayleigh est élevé et l'interaction non-linéaire devient très importante. Finalement, la forme plus ou moins enrichie par des harmoniques, prise par l'onde longitudinale oscillante en fonction de l'abscisse où elle est captée, s'explique bien par l'existence simultanée de l'onde oscillante transversale et d'un fort couplage non-linéaire. En effet, on peut penser qu'aux abscisses où les deux ondes oscillantes longitudinale et transversale sont en concordance de phases, les fréquences d'oscillations étant les mêmes, l'onde longitudinale oscillante 3-D est une sinusoïde monopériodique qui présente un pic fondamental sur les DSP à la fréquence f_1 . Par contre, aux abscisses où ces deux ondes oscillantes sont en opposition de phase, l'onde longitudinale oscillante 3-D comporte en plus de la sinusoïde de base, une arche supplémentaire intercalée, qui se détecte après transformation de Fourier par la présence de deux pics aux fréquences f_1 et $2f_1$. Dans ce cas, si l'amplitude de l'onde oscillante transversale est plus importante que celle de l'onde oscillante longitudinale, la DSP exhibe un pic plus important à la fréquence $2f_1$. Sur les figures 12a, 12b et 12c, les oscillations de température mesurées par la sonde T_6 au point ($X = 200$ mm, $\alpha = 90^\circ$) appartenant au plan vertical longitudinal XZ, et la sonde T_3 au point ($X = 200$ mm, $\alpha = 0^\circ$) appartenant au plan horizontal longitudinal XY sont représentées pour trois nombres de Hartmann décroissants : $Ha = \{3.63, 3.31, 2.86\}$. Deux phénomènes remarquables sont notés.

1. Le signal mesuré par la sonde T_3 dans le plan XY est celui de l'onde oscillante transversale. Son amplitude augmente lorsque le nombre de Hartmann est décroissant. Quelle que soit sa valeur, la transformée de Fourier démontre une très faible influence du couplage non-linéaire : le signal est monopériodique de fréquence fondamentale f_1 .

2. L'onde oscillante longitudinale 3D progressive est captée par la sonde T_6 dans le plan XZ. En même temps que le nombre de Hartmann décroît et que le nombre de Rayleigh augmente, l'intensité du couplage non-linéaire se mesure nettement à la fois sur le signal, par l'arche additionnelle d'amplitude croissante, et sur la densité spectrale de puissance, par le pic de fréquence f_1 initialement fondamental (figure 12a), devenant la sous-harmonique du pic de fréquence $2f_1$ (figures 12b et 12c). Ce phénomène s'explique bien par la croissance simultanée de l'onde oscillante transversale dans le plan XY au détriment de l'onde oscillante longitudinale 3-D.

Un dernier point important à mentionner est le fait que l'onde transversale oscillante disparaît et apparaît en même temps que l'onde oscillante longitudinale 3-D. En conséquence, elle présente le même hystérésis.

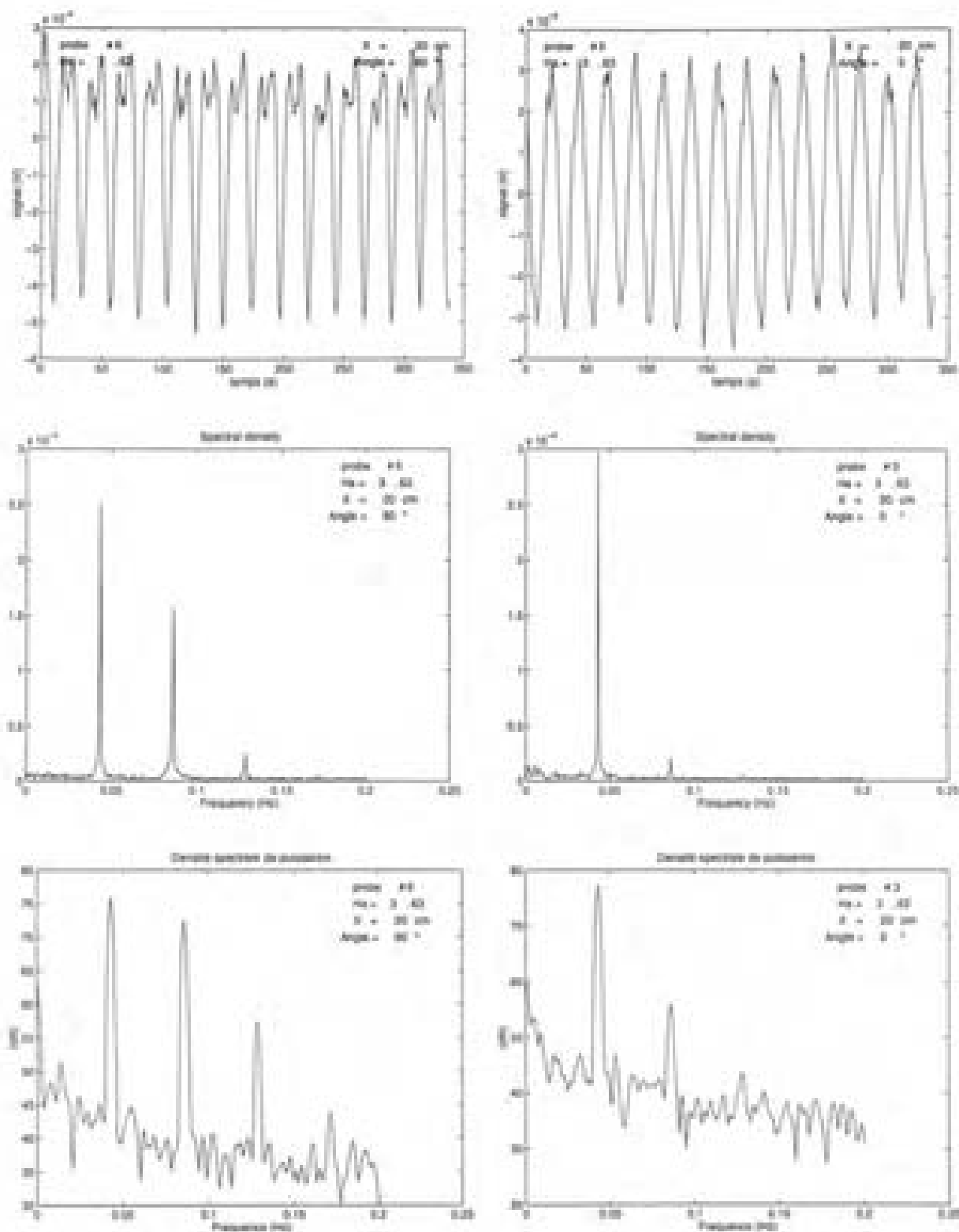
Sonde T_4 Sonde T_3 

Figure 12a. Signaux, transformées de Fourier et densités spectrales de puissance pour $Ha=3.63$.

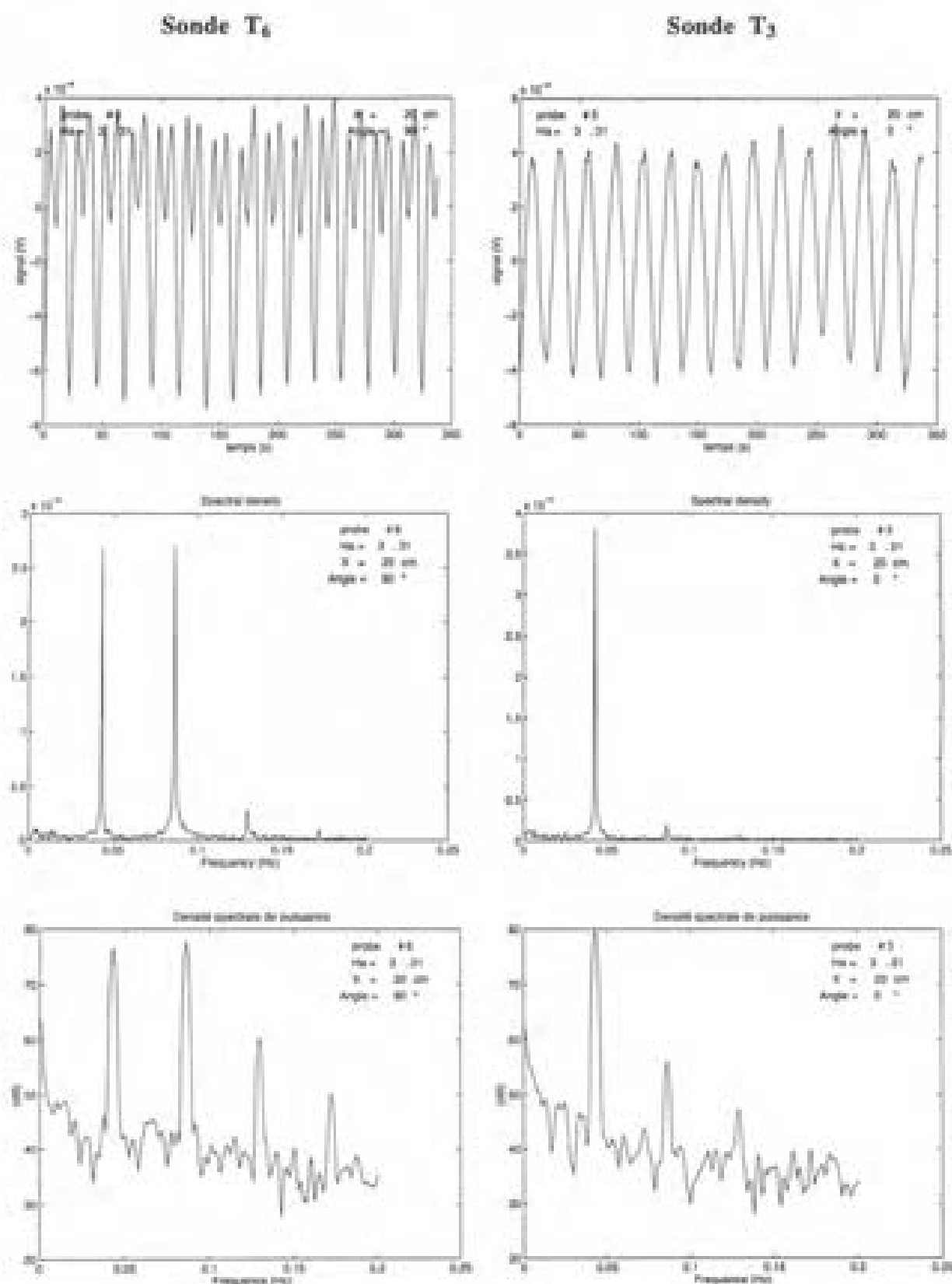


Figure 12b. Signaux, transformées de Fourier et densités spectrales de puissance pour $Ha=3.31$

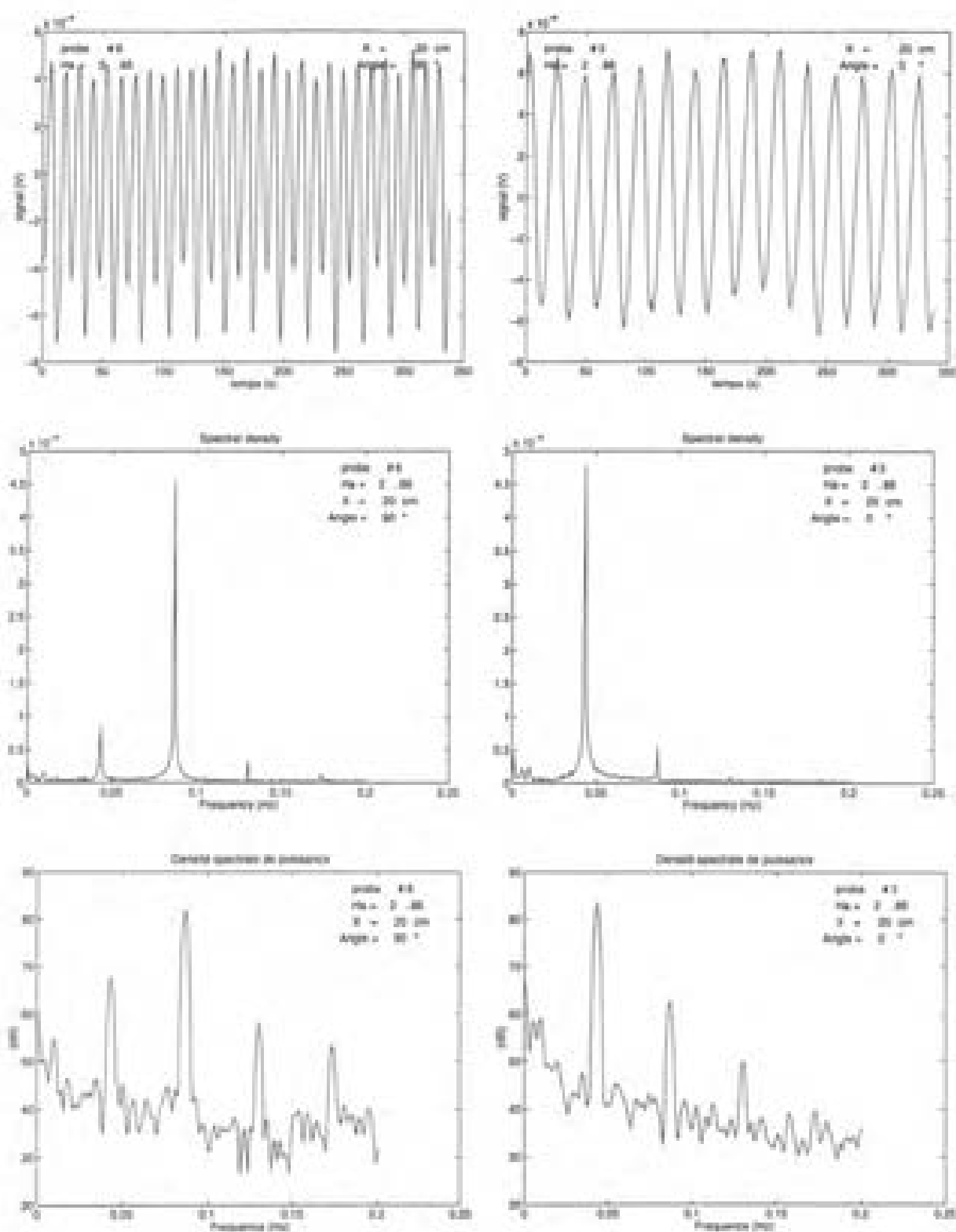
Sonde T_4 Sonde T_3 

Figure 12c. Signaux, transformées de Fourier et densités spectrales de puissance pour $Ha=2.86$

4.5.1.2. Une deuxième onde oscillante longitudinale de basse-fréquence

Les ondes oscillantes transversale et longitudinale sont détectées en même temps pour une même valeur du nombre de Hartmann ($Ha^*_{11}=3.63$ pour $Gr_{4.7K3}$). Si Ha^* continue de décroître, une autre oscillation de température est détectée par nos mesures réalisées à $Ha=2.35$. Cette oscillation est de basse fréquence f_2 égale à 8.9 mHz, tandis que f_1 vaut 42.9 mHz. Sur les figures 13a et 13b sont représentées les oscillations de températures détectées par les binômes de sondes synchronisées (T_7, T_8) et (T_3, T_6) ainsi que les densités spectrales de puissance correspondantes. L'influence du couplage non-linéaire souligné auparavant apparaît de manière flagrante sur ces deux enregistrements simultanés : le signal de la sonde T_3 garde la forme d'une sinusoïde monopériodique de fréquence f_1 tandis que le signal délivré par la sonde T_8 épouse la forme d'une sinusoïde de fréquence fondamentale $2f_1$. Le pic émergent de fréquence f_2 est détectable sur les DSP obtenues à partir des signaux mesurés par les sondes T_7 et T_6 . La comparaison des signaux captés par les sondes synchronisées T_3 et T_6 permet d'établir que l'amplitude de cette oscillation basse fréquence est maximale dans le plan vertical longitudinal comme pour l'onde longitudinale oscillante 3-D de fréquence fondamentale f_1 . Sur les sondes T_1 et T_2 du peigne n°1, éloignées davantage encore du plan XZ et positionnées sur l'axe horizontal Y, cette oscillation de basse fréquence f_2 n'est pas détectée. La comparaison entre les signaux synchronisés délivrés par les sondes T_4 et T_7 atteste d'un déphasage suivant l'axe X de la cellule : ces deux signaux sont en opposition de phase. Des mesures plus fines, menées dans le plan XZ, permettent d'établir les propriétés de cette onde oscillante longitudinale basse fréquence. Son amplitude dépend notablement de la position axiale de la DSM. En certaines abscisses, cette onde oscillante basse fréquence disparaît complètement pour ne laisser place qu'au signal de fréquence $2f_1$. Ces points d'extinction sont périodiquement espacés de même que les points où son amplitude est maximale et détectable. La présence de ventres oscillants et de noeuds d'extinction est la signature d'une onde stationnaire. La longueur d'onde de cette onde oscillante stationnaire de basse fréquence est estimée à $\lambda_x=40\pm 5$ mm. Contrairement aux deux ondes oscillantes précédentes caractérisées par la fréquence f_1 , l'apparition ainsi que la disparition de l'onde oscillante basse fréquence surviennent pour le même nombre de Hartmann critique, estimé à 2.94. Tout hystérésis est donc écarté et une bifurcation de type supercritique est suspectée lors de l'apparition de cette nouvelle onde oscillante basse fréquence.

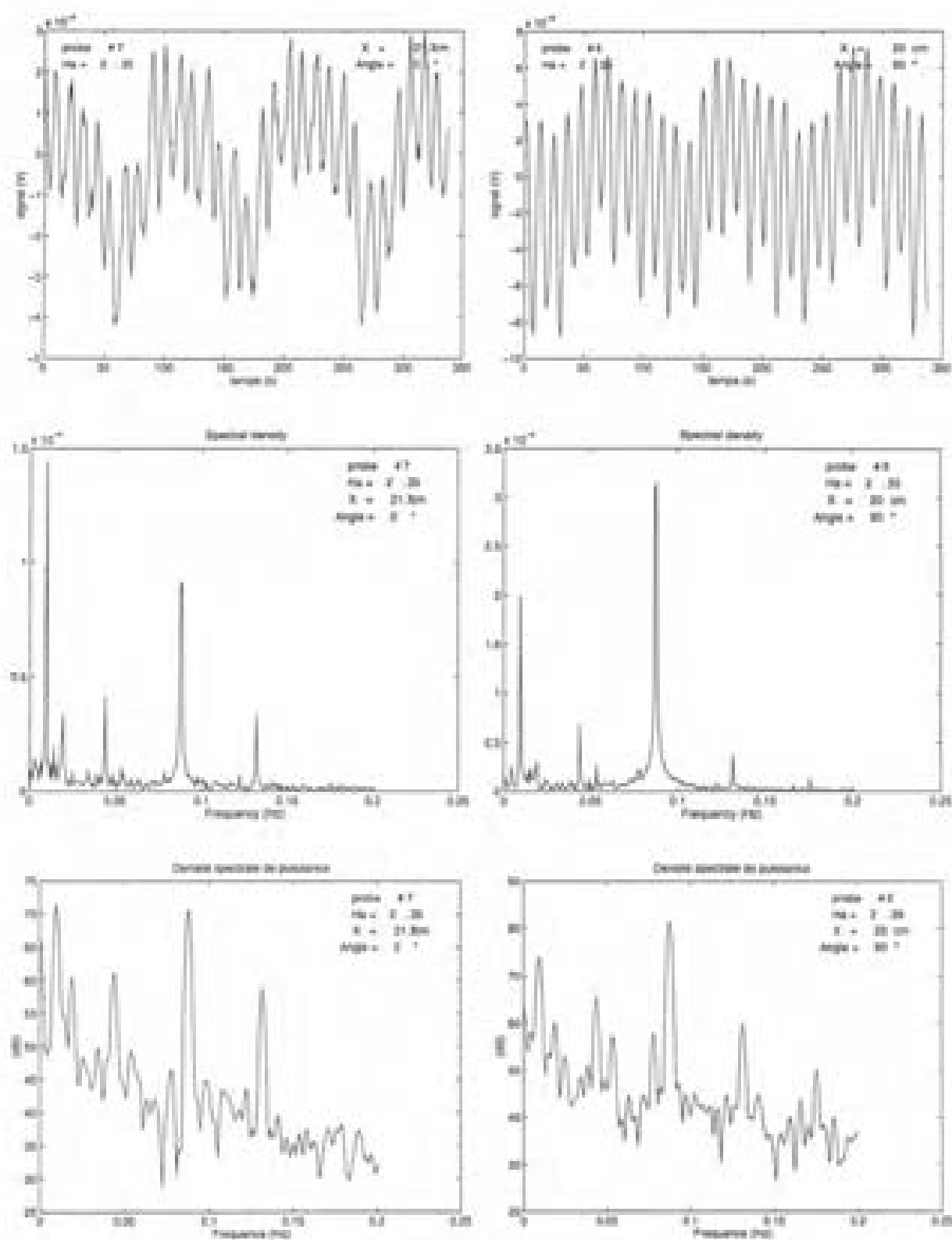
Sonde T₇Sonde T₄

Figure 13a. Signaux synchronisés, transformées de Fourier et densités spectrales de puissance pour $Ha=2.35$

Sonde T_4

Sonde T_3

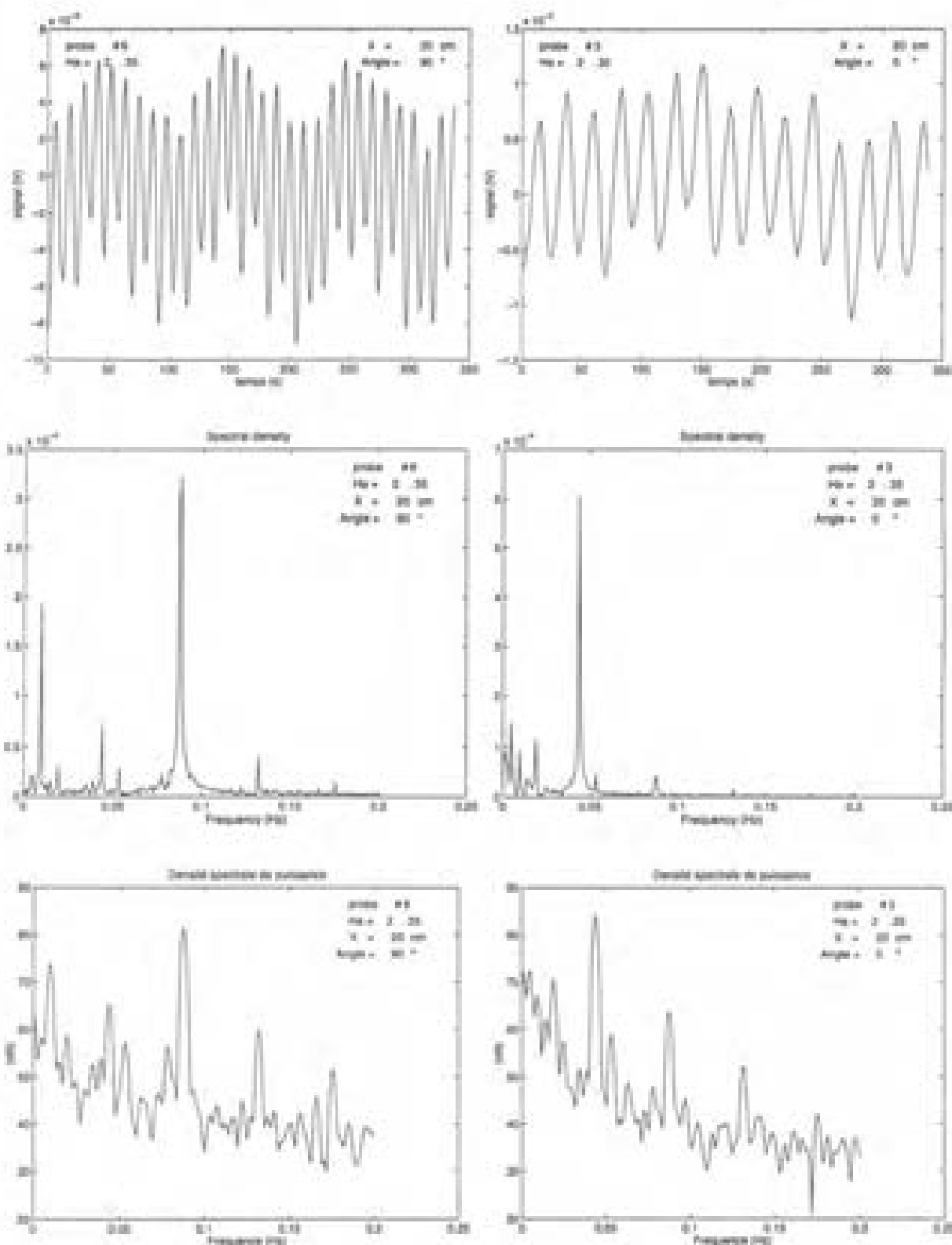


Figure 13b. Signaux synchronisés, transformées de Fourier et densités spectrales de puissance pour $Ha=2.35$

4.5.1.3. *Présence anecdotique d'une sous-harmonique*

Cette expérience de transition à $Gr_{4.7K}$, d'une durée pratique de quatre à cinq jours, n'a pu être reproduite que trois fois. La reproductibilité des phénomènes cités jusqu'à maintenant est parfaite. En revanche, sur deux des expériences reproduites, la présence *anecdotique et éphémère* d'une sous-harmonique $f_1/2$ et de son harmonique d'ordre 3, $(3/2 f_1)$ a été notée. Ce problème de reproductibilité implique qu'aucune identification du phénomène mécanique associé à cette sous-harmonique (une onde oscillante par exemple) n'ait pu être menée. L'impossibilité de stopper la transition à un nombre de Hartmann exactement intermédiaire entre l'apparition et la disparition de cette sous-harmonique est la raison principale de cette difficulté expérimentale.

4.5.2. *Etude de la transition à $Gr_{4.7K}$ vers le chaos temporel*

La transition vécue par l'écoulement thermogravitaire MHD de l'expérience MASCOT se prête davantage, pour des nombres de Grashoff modérés, à une étude de transition vers un chaos temporel. Dans notre expérience, la visualisation immédiate des structures 2-D stationnaires susceptibles de se former nous apparaît hors d'atteinte. Nous nous sommes donc concentrés sur les aspects instationnaires de la transition de l'écoulement. Il devient essentiel de se rattacher aux théories descriptives de la transition vers le chaos temporel. Finalement, les ouvrages écrits par Bergé *et al* [1992] et Manneville [1991], ainsi que quelques références-clefs (Fauve [1986], Swinney [1983], ... etc.), nous permettent d'interpréter quelques propriétés essentielles des phénomènes mis en évidence dans le paragraphe précédent consacré à l'étude mécanique des instabilités oscillantes. L'objectif de ce travail consiste également à dégager quelques pistes utiles pour les théoriciens désireux de décrire cette transition avec la démarche de Lorenz (1963) : c'est à dire réduire le système d'équations aux dérivées partielles descriptif de cet écoulement en un système d'équations différentielles ordinaires portant sur le flot adéquat. Cette réduction donne alors accès au formalisme mathématique associé à l'étude des systèmes dynamiques. Le flot, noté dV/dt , où V désigne le vecteur des variables du système dynamique (choisies parmi les variables scalaires et vectorielles impliquées dans la physique du milieu continu), devra suivre lors de la transition au moins les bifurcations mises en évidence dans cette investigation expérimentale.

4.5.2.1. *Transition vers le chaos temporel : un bref aperçu*

Le système d'équations aux dérivées partielles descriptives de la physique du milieu continu choisi (comportant un nombre infini de degrés de liberté) est réduit en un système dynamique fini portant sur un nombre fini de degrés de liberté. Cette opération est approximative. Néanmoins, pour des géométries confinées, elle permet la description

déterministe de nombreuses transitions d'écoulements vers le chaos temporel ; ce déterminisme est en outre validé par l'expérience. En effet, d'une expérience à une autre, il est généralement impossible de prédire le type de scénario vers le chaos qui sera observé. Par contre, une fois le scénario déterminé pour une expérience donnée, le chemin suivi vers le chaos est remarquablement reproductible. Pour ces expériences, la géométrie de choix est typiquement la configuration de Rayleigh-Bénard.

L'approximation d'un milieu continu à un système de dimension finie repose sur l'idée essentielle que l'on peut créer un chaos temporel à partir d'un nombre fini de bifurcations (pour employer la terminologie mise en place par Poincaré au début de notre siècle). Justement, à partir des années 70, le point de vue de Landau consistant à décrire la naissance de la turbulence comme la création infiniment itérée de modes est remis en cause par Ruelle et Takens. La tendance émergente consistant à affirmer qu'un nombre fini de bifurcations est suffisant pour créer un écoulement chaotique est bien appuyée par des expériences menées avec l'appui de l'écoulement de convection Rayleigh-Bénard. La distinction entre turbulence et chaos (c'est à dire chaos temporel) s'est ensuite naturellement affirmée comme la présence de degrés de liberté dans l'espace respectivement devenus possibles ou gelés. Le concept turbulence est dorénavant vu comme un chaos spatio-temporel.

Le paramètre, qui fait passer le système dynamique étudié d'un état stable à un autre état stable ou instable est nommé paramètre de contrôle. Dans notre expérience, nous avons pu identifier deux candidats au titre de paramètre de contrôle, les nombres de Grashoff et le nombre de Hartmann. Le premier constitue en quelque sorte un indicateur du niveau d'énergie mécanique injecté dans le système mécanique étudié, à savoir la configuration G-H étudiée ; le deuxième est plutôt un indicateur du taux de dissipation de l'énergie mécanique par effet Joule. En augmentant le premier ou en diminuant le deuxième, l'expérimentateur peut guider la transition. En choisissant des configurations géométriques étroites de telle sorte que tous les modes spatiaux soient gelés, si le paramètre de contrôle de l'expérience augmente, alors différents chemins vers le chaos temporel sont mis en évidence par l'expérience. Fauve [1984] présente une vue précise de l'ensemble de ces scénarii vers le chaos temporel. Les caractéristiques les plus évidentes portant sur les scénarii les plus classiques sont rapidement cataloguées ci-dessous.

La quasi-périodicité

Ce scénario consiste en la genèse successive d'au plus trois modes oscillants, de fréquences f_1 , f_2 et éventuellement f_3 , toutes incommensurables. La fréquence f_2 survient après une bifurcation supercritique de Hopf. Ce dernier type de bifurcation se caractérise par l'absence d'hystérésis. De plus, lorsque le paramètre de contrôle Ra franchit la valeur critique Ra_c , l'amplitude du signal de fréquence f_2 suit une loi du type $(Ra - Ra_c)^{1/2}$. Si une troisième fréquence f_3 apparaît, c'est conjointement avec le chaos. Numériquement (voir la présentation

du scénario de Curry-Yorke dans l'ouvrage de Bergé *et al* (1990)) et expérimentalement, la déstabilisation directe d'un tore T^2 (attracteur périodique lié aux deux premières fréquences f_1 et f_2) en un attracteur étrange, peut également être observée ; elle survient en même temps que le chaos. L'attracteur est alors défini comme l'ensemble des trajectoires décrites par V dans l'espace des phases, de base : l'ensemble des composantes de V . L'attracteur associé à un état stationnaire, à un état à 1 mode oscillant, et à un état à 2 modes oscillants est, respectivement, un point, un tore T^1 (un cercle par exemple) et un tore T^2 (deux dimensions).

La cascade sous-harmonique

Un autre scénario typique de transition, mis en évidence mathématiquement par Feigenbaum [1974] et expérimentalement par Libchaber *et al* [1983] dans le cas de la convection Rayleigh-Bénard, consiste, lorsque le nombre Ra augmente, en un doublement répété de la période d'un mode initial oscillant jusqu'à émergence du chaos. La signature du chaos se traduit par un bruit à large bande dont le niveau spectral est de plus en plus important sur le spectre d'énergie.

L'intermittence temporelle

Ce dernier scénario nécessite une bifurcation initiale à partir de l'état stationnaire, de type sous-critique. Comme précisé auparavant dans ce chapitre, la présence de l'intermittence temporelle est signée par l'émergence de brèves bouffées instationnaires pendant l'évolution stationnaire ou oscillante d'une variable mesurée.

Les phénomènes se compliquent lorsque le système dynamique évolue dans une géométrie plus élargie car, pour la convection Rayleigh-Bénard, les rouleaux stationnaires n'ont plus un nombre de modes fixés. Sachant que la sélection des instabilités secondaires dépendantes du temps dépend du nombre de modes stationnaires, le comportement de la transition est passablement plus complexe. Des phénomènes comme une faible variation de l'amplitude et de la phase des instabilités oscillantes sont un signe annonciateur d'une lente évolution des modes stationnaires. Cependant, depuis quelques années, on assiste au développement prometteur du formalisme d'enveloppe appliqué à l'étude des textures. Ce formalisme implique pour celui qui le pratique, des développements mathématiques lourds, mais prend en compte cette faible dépendance spatiale. Le terme "enveloppe" signifie que l'amplitude de l'instabilité spatio-temporelle évolue dans une enveloppe $A(x,y,t)$ où (x,y) désigne l'espace 2-D. Le terme "texture" désigne la géométrie globale des instabilités stationnaires en forme de rouleaux, potentiellement soumises à des déformations, des pincements, des dislocations ou bien des migrations lentes. Ces considérations, présentées par Manneville [1991], dépassent largement le cadre de cette thèse mais peuvent en constituer une suite intéressante.

Notre expérience, à géométrie étendue, présente un élanement privilégié suivant l'axe de la cellule. Les éléments succinctement présentés ci-dessus permettent de proposer des interprétations possibles du bruit basse fréquence et de la pente globale négative, apparaissant clairement sur les spectres de densité de puissance exposés dans ce chapitre.

Une première explication est liée au fait que des cellules stationnaires peuvent faire l'objet de déformations caractérisées par de longues échelles de temps, non-cycliques. Ce processus induit sur une large gamme du spectre de Fourier, un niveau spectral moyen décroissant et monotone. Dans le cas de l'écoulement de Rayleigh-Bénard, de tels comportements ont déjà été observés sur des DSP par Libchaber et Maurer [1978] dans le cas d'une cellule cylindrique de grand diamètre et très aplatie (en forme de galette). Ahlers *et al* [1985] ou bien encore Pocheau *et al* [1985] ont obtenu une confirmation visuelle de ce processus aperiodique, lentement dépendant du temps. Il s'apparente à des nucléations ou des dislocations créées entre les différents rouleaux de convection.

Une deuxième explication découle des travaux expérimentaux menés par Croquette *et al* [1986] avec la même géométrie cylindrique en forme de galette. La géométrie circulaire de la paroi longitudinale favorise la courbure des structures convectives stationnaires orthogonales à la paroi. Cette courbure provoque la migration spatiale lente de ces structures (de l'ordre de 10 $\mu\text{m/s}$). Pour notre configuration, la présence des quatre vortex secondaires peut également entretenir un lent écoulement de dérive (vortex tertiaires ...etc).

Sur les DSP typiques présentées dans ce chapitre, le niveau de bruit extrinsèque, c'est à dire le bruit blanc occasionné par les chaînes d'instrumentation et de traitement de l'information reste à un niveau constant de l'ordre de 10 dB. Deux observations sont à mentionner : un bruit intrinsèque à basse fréquence ainsi qu'une pente négative apparaissent clairement sur ces DSP. A la lumière des éléments tirés de la littérature et précédemment exposés, une explication cohérente peut être apportée par la présence effective de cellules marginales 2-D stationnaires. En bon accord avec la prédiction de Bojarevics [1994], ces instabilités stationnaires 2-D seraient donc déjà présentes lorsque les instabilités oscillantes surgissent.

4.5.2.2. *Le cas école de la convection Rayleigh-Bénard*

La configuration Rayleigh-Bénard est riche d'enseignements par les nombreux phénomènes de transition observés lorsque l'écoulement stationnaire constitué de rouleaux horizontaux se déstabilise. Le mécanisme moteur de l'instabilité est créé par un gradient de température vertical appliqué sur une couche fluide intercalée entre une plaque chaude en bas et une plaque froide en haut. Les mécanismes dissipatifs de l'énergie sont la diffusion visqueuse et la diffusion thermique. La diffusion thermique, en diminuant les gradients de température, conduit à une diminution des gradients de densité donc également à une diminution de la force motrice.

Le rotationnel de la force de flottabilité s'identifie à un couple moteur auquel peut être associé un temps caractéristique t_f , évalué ainsi :

$$t_f^2 = \text{longueur} / (\text{force de flottabilité} / \text{densité}) = R_0 / (g \beta \delta T),$$

où l'échelle caractéristique de température δT , est égale à $G.R_0$ (G est le gradient vertical de température et R_0 , la distance entre les deux plaques). Aux mécanismes dissipatifs sont également associés des temps caractéristiques qui sont, pour la température et la quantité de mouvement, respectivement $t_\alpha = R_0^2 / \alpha$ et $t_\nu = R_0^2 / \nu$. Le nombre de Rayleigh est défini comme le rapport du produit des deux temps t_α et t_ν , conduisant *in fine* à la diffusion de la quantité de mouvement, au carré du temps t_f lié à la création de quantité de mouvement. Ce nombre de Rayleigh est le paramètre de contrôle de la transition, lequel en augmentant, fait passer l'écoulement d'un état laminaire et stationnaire à un état de chaos temporel, voire de turbulence. Si les degrés de liberté spatiaux des structures stationnaires (rouleaux 2-D de convection) sont gelés par le fort confinement de la géométrie, des études de transition vers le chaos temporel deviennent possible.

De nombreuses études ont été conduites sur cette base, en présence d'un champ magnétique uniforme vertical. Le support théorique de ces études, essentiellement développé par Busse et collaborateurs (exemple : Busse and Clever [1982]), a permis de mettre en évidence une diversité d'instabilités possibles lors de la transition (instabilité d'Eckhaus autrement appelée instabilité de compression-dilatation, instabilité variqueuse-oblique, instabilité en rouleaux croisés, instabilité zigzag). Un résumé de ces travaux peut être trouvé dans la monographie de Manneville [1991].

Dans tous les cas, l'étude de stabilité des rouleaux 2-D réalisée par Busse et collaborateurs pour des fluides de faibles nombres de Prandtl, met en évidence :

1. d'une part, la naissance systématique d'un premier mode inertiel instable dans le temps, caractérisé par une oscillation des rouleaux primaires de convection : l'oscillation de Busse schématisée sur la figure 14,
2. d'autre part, un retard du seuil critique d'apparition de cette oscillation, dû à la présence du champ magnétique, sans que celui-ci ne soit à l'origine de la création de nouveaux modes.

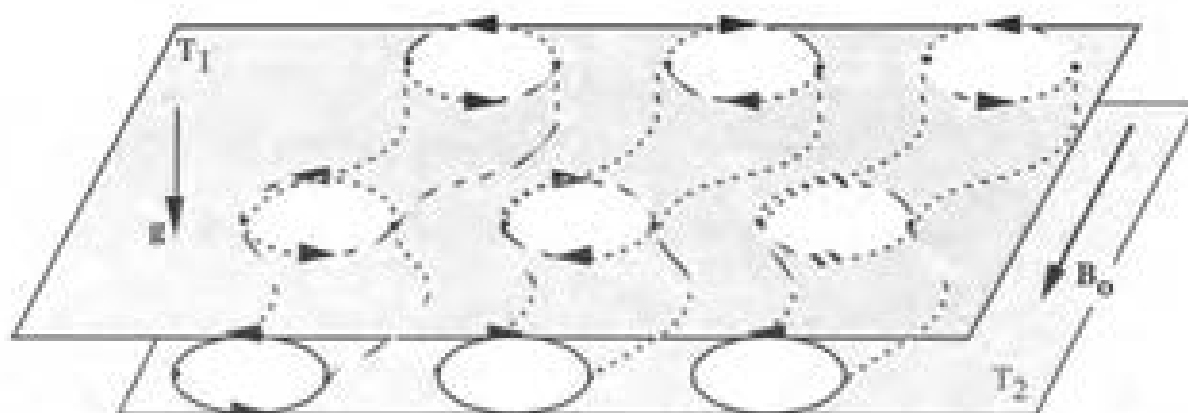


Figure 14. Oscillations de Busse.

Mettant en application ces prédictions théoriques, Libchaber *et al* [1983] ont découvert par l'outil expérimental, différentes routes vers le chaos sur une expérience de Rayleigh-Bénard réalisée avec du mercure. Pour un champ magnétique appliqué horizontalement, favorisant l'alignement horizontal des instabilités stationnaires 2-D en forme de rouleaux, la première instabilité instationnaire observée par Libchaber *et al* [1983] est une onde oscillante longitudinale se propageant le long des rouleaux : l'oscillation de Busse. Ce mode dynamique oscillant devient le support des diverses routes vers le chaos qui ont permis de valider expérimentalement des scénarii de transitions telles que :

1. la cascade sous-harmonique,
2. les régimes quasi-périodiques à deux ou trois fréquences.

La présence d'un fort champ magnétique dans le cas de cette expérience oblige les structures stationnaires 2-D à ne pas subir un écoulement lent de dérive, 3-D. Libchaber *et al* [1983] montrent dans ce cas la possibilité de guider les diverses transitions à l'aide du couple de paramètres de contrôle : (Ra, Q) , où les nombres Ra et Q ne sont autres que le nombre de Rayleigh et le nombre de Chandrasekhar (carré du nombre de Hartmann). Le nombre de Rayleigh guide la première bifurcation débouchant sur la présence des rouleaux stationnaires, et l'inverse du nombre de Chandrasekhar, en pondérant le nombre de Reynolds (et formant ainsi l'inverse du paramètre d'interaction N^{-1}), guide la deuxième bifurcation correspondant à l'apparition de l'oscillation de Busse.

4.5.2.3. Le cas de MASCOT

Le gradient de température est horizontal et uniforme sur une grande partie centrale de la cellule, l'écoulement de base (circulation de Hadley) est parallèle dans ce coeur. Les termes non-linéaires peuvent être considérés comme faibles par rapport aux autres termes des équations de Navier-Stokes. Pour ce système dissipatif, le mécanisme moteur de l'écoulement est aussi la force de flottabilité $-\rho g \beta (T - T_{centre})$, et plus exactement son rotationnel. La circulation de Hadley dans cette cavité différentiellement chauffée, est induite par le couple Γ défini par $\Gamma = \nabla \times [-\rho g \beta (T - T_{centre})]$. Nous allons adopter deux démarches pour construire deux paramètres de contrôle possibles de la transition définis comme deux nombres de Rayleigh effectifs Ra_1 et Ra_2 .

La détermination de Ra_1 repose sur une démarche qualitative basée sur la considération des échelles de temps caractéristiques. Comme pour l'analyse menée au paragraphe précédent, aux trois temps caractéristiques t_f , t_α , et t_V s'ajoute un temps supplémentaire de dissipation d'énergie mécanique par effet Joule t_B , défini comme le temps pendant lequel une fluctuation de vitesse occasionnée par une structure tourbillonnaire, par exemple, est freinée par la force de Laplace : son expression est donnée par la relation : $t_B = \rho / \sigma B_0^2$. Comme le présente Lykoudis [1990], à l'aide de ces quatre temps, il est possible de construire un nombre adimensionnel. Ce nombre, similairement au nombre de Rayleigh construit pour la configuration de Rayleigh-Bénard, peut être défini comme le rapport entre le produit des trois temps t_α , t_B et t_V , conduisant à de la diffusion de quantité de mouvement, avec le cube du temps t_f , à l'origine de la production de quantité de mouvement. Ce nombre de Rayleigh Ra_1 s'exprime par la relation suivante :

$$Ra_1 = Ra \left(\frac{Ha^2}{Gr^{1/2}} \right)^{-1} = Ra / Ly = Pr Gr^{1/2} / Ha^2,$$

où Ly est le nombre de Lykoudis construit comme le rapport t_f/t_B .

Adoptons une démarche plus quantitative et considérons l'écoulement avec le point de vue de l'équilibre entre les différents couples dynamiques impliqués : couple moteur de flottabilité et couples visqueux et magnétiques, responsables de la dissipation de l'énergie. Ecrivons les équations de Navier-Stokes dans le plan vertical longitudinal XZ en ne considérant que le cisaillement principal suivant l'axe principal de la cellule :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial X} + W \frac{\partial U}{\partial Z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} - \frac{\sigma B_0^2 U}{\rho} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2}, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial X} + W \frac{\partial W}{\partial Z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Z} - g \beta (T - T_{centre}), \end{aligned}$$

où le champ de vitesse de la circulation de Hadley s'écrit $\mathbf{u} = (U, W)$. Ces équations se simplifient si l'on suppose que dans le centre de la cellule, l'écoulement est parallèle et que par conséquent, les termes non-linéaires s'écroulent. D'autre part, le rotationnel appliqué au système simplifié permet de mettre en évidence l'équilibre entre les couples ; cet équilibre, projeté sur l'axe Y , s'écrit sous la forme :

$$g \beta \frac{\partial T}{\partial X} = -\nu \frac{\partial^3 U}{\partial Z^3} + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \frac{\partial U}{\partial Z} ,$$

le terme de gauche s'identifie au produit scalaire $\Gamma \cdot \mathbf{Y}$, où \mathbf{Y} désigne le vecteur directeur de l'axe horizontal. Un ordre de grandeur U du champ de vitesse se déduit de cet équilibre :

$$g \beta G = -\nu \frac{U}{R_0^3} + \frac{\sigma B_0^2}{\rho} \frac{U}{R_0} , \quad \text{soit} \quad U = \frac{\nu}{R_0} \left[\frac{Gr_G}{Ha^2 - 1} \right] ,$$

où le gradient axial de température est désigné par G . Les non-linéarités, nécessaires dans le contexte de cette transition, sont introduites par l'équation de l'énergie. Cette démarche se justifie par l'étude des ondes oscillantes conduite au paragraphe 4.4.1. qui nous a mené vers la mise en évidence d'un couplage non-linéaire fort entre les champs de vitesse et de température. Un nouveau nombre de Rayleigh effectif Ra_2 , qui remplit le rôle de coefficient pondérateur des termes non-linéaires, s'écrit sous la forme :

$$Ra_2 = \left[\frac{Pr}{Ha^2 - 1} \right] Gr_G .$$

La suite démontre que :

1. le paramètre Ra_2 décrit correctement la transition à faible nombre de Grashoff $Gr_{\Delta T}$.
2. la première expression du nombre de Rayleigh Ra_1 impliquant le nombre de Lykoudis, ainsi qu'une analyse qualitative en termes de temps caractéristiques, ne peut être considérée dans notre cas.

Pour la configuration Rayleigh-Bénard, il faut (Libchaber *et al* [1983]) considérer le couple de paramètres de contrôle (Ra, Q) : les nombres de Rayleigh et de Chandrasekhar Ra et Q sont responsables, respectivement, de l'apparition des rouleaux et de l'oscillation de Busse. Dans une configuration G-H, la suite de notre étude montre que la deuxième bifurcation (supercritique) vers une instabilité oscillante stationnaire (spatialement) de basse fréquence est contrôlée par le seul nombre de Rayleigh effectif Ra_2 , dans lequel toutes les sources d'énergies dissipatives et motrice sont contenues.

4.5.2.4 Bifurcation supercritique de Hopf pour l'onde oscillante basse-fréquence

Les nombres de Hartmann critiques correspondant à l'apparition et la disparition de l'onde oscillante stationnaire de basse fréquence f_2 , sont trouvés égaux tous les deux à 2,94. Autrement dit, aucun phénomène d'hystérésis n'est mis en évidence pour cette onde. Lorsque le nombre de Hartmann diminue, le nombre de Rayleigh augmente et peut être vu comme le paramètre de contrôle de cette nouvelle bifurcation. En effet, le couplage non-linéaire induit par les termes non-linéaires de l'équation de l'énergie a été diagnostiqué comme une source de cette transition. En choisissant le nombre de Rayleigh modifié calculé au §4.4.2.3 : Ra_2 , pour paramètre de contrôle, et en mesurant l'amplitude de la sinusoïde associée à cette basse fréquence, nous trouvons que cette amplitude A suit au premier ordre en $(Ra_2 - Ra_{2C})$, la loi caractéristique d'une bifurcation supercritique de Hopf : $A \sim (Ra_2 - Ra_{2C})^{1/2}$. Pour le nombre de Grashoff $Gr_{4,7K}$, le nombre de Rayleigh critique Ra_{2C} est de l'ordre de 865. Ces résultats sont illustrés sur la figure 15.

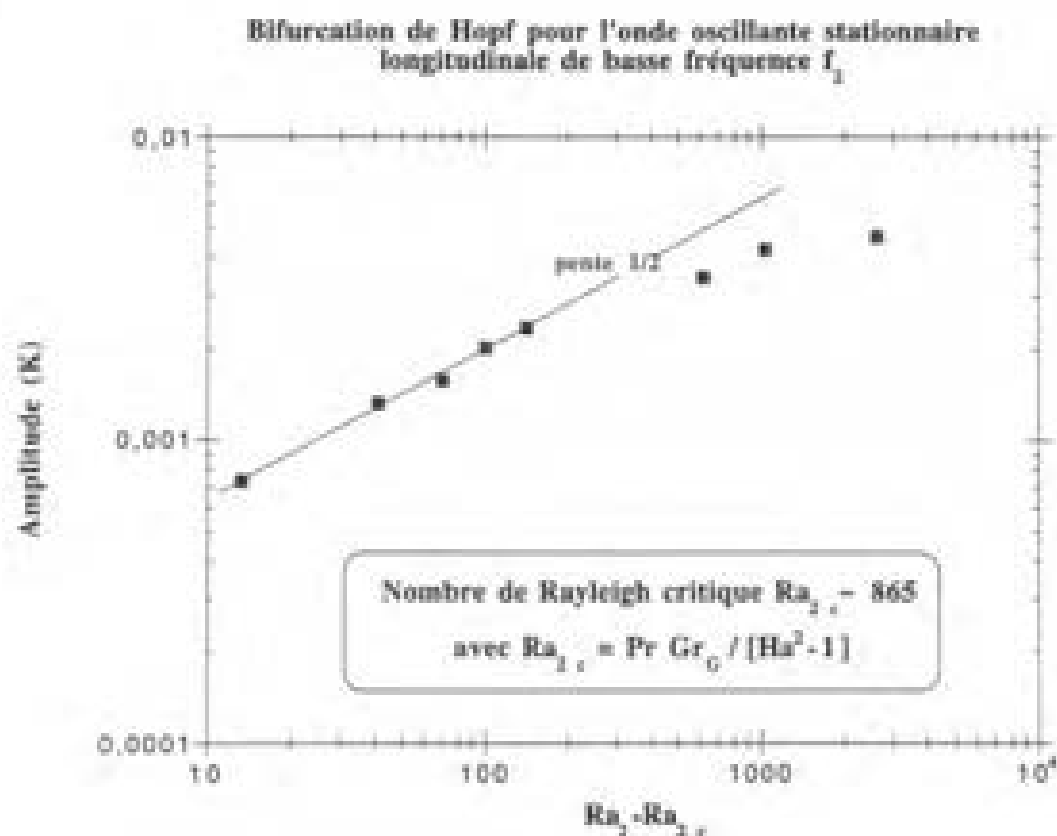


Figure 15.

4.5.2.5 *Emergence du chaos par déstabilisation d'un tore T^2*

Cette transition peut maintenant être analysée avec le point de vue du formalisme adapté à l'étude des *scenarii* de transition vers le chaos. Les densités spectrales de puissance sont un outil privilégié. Sur la figure 16 sont représentées les quatre DSP obtenues à partir du signal mesuré par la sonde thermocouple T_8 au point ($X=200$ mm, $\Phi=90^\circ$) pour les quatre nombres de Hartmann suivants : $Ha=\{3.11, 2.82, 2.35, 0.85\}$. L'analyse de la figure 16 mène à deux conclusions remarquables. Cette transition est guidée par les apparitions consécutives de la fréquence f_1 ($Ha=3.11$) puis de la fréquence f_2 ($Ha=2.82$). Si le nombre de Hartmann continue de décroître ($Ha=2.35$), ou si le nombre de Rayleigh modifié Ra_2 augmente, de nouveaux pics de fréquence émergent sur la DSP à des fréquences $f_{m,n}$ définies (à la précision spectrale près) par des combinaisons linéaires de f_1 et f_2 : $f_{m,n} = (m f_1 + n f_2)$. Si le paramètre de contrôle Ra_2 continue de croître, le chaos surgit, bien visible sur le spectre associé à $Ha=0.85$ par l'augmentation concomitante de l'aire sous la courbe de la DSP, expliquée par un niveau croissant de bruit intrinsèque à basse fréquence.

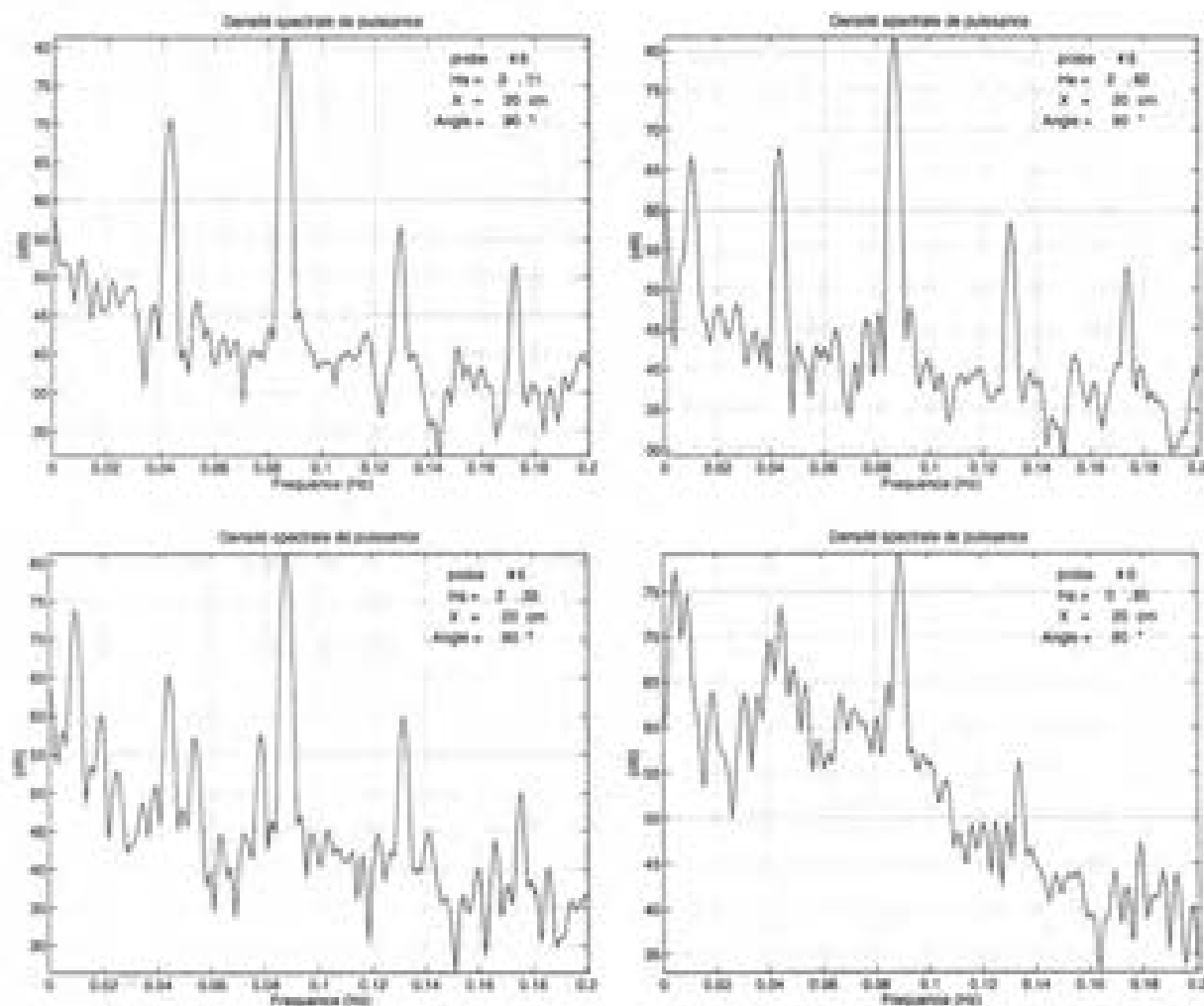


Figure 16. Transition vue par les densités spectrales de puissance

Un problème est lié aux densités spectrales de puissance par l'imprécision sur la fréquence spectrale Δf , trop élevée dans notre cas pour établir de manière indiscutable que le chaos temporel observé est dû à la déstabilisation d'un régime bi-périodique à deux fréquences **incommensurables**. Face à cette difficulté, la visualisation des attracteurs dans l'espace des phases devient un outil adéquat pour diagnostiquer directement via la topologie de l'attracteur si le chaos est issu ou non de la déstabilisation d'un tore T^2 , attracteur d'un régime bi-périodique. En revanche, l'expérimentateur est confronté au problème de la représentation de l'attracteur dans l'espace des phases dont la base est constituée de toutes les variables physiques du système dynamique. Dans notre expérience, nous ne mesurons qu'un seul observable : la variable température. Swinney [1983], propose une alternative à cette difficulté d'ordre expérimentale. Sa méthode, appuyée par un théorème démontré par Ruelle, se base sur l'idée que dans un espace de m dimensions, un portrait de phases construit à partir du vecteur $\{T(t), T(t+\Delta t), T(t+2\Delta t), \dots, T(t+(m-1)\Delta t)\}$ où t est le temps durant lequel la mesure de la variable T est réalisée, possède les mêmes propriétés que l'attracteur représenté dans l'espace des phases de dimensions N à la condition que $m \geq 2N$. Les paramètres Δt et m sont, respectivement, un temps de retard et un nombre entier ; **en pratique**, ils respectent les deux critères suivants :

1. m est déterminé par incrémentations successives jusqu'à ce que le portrait de phase associé, tracé dans l'espace de dimension m , ne subisse plus de changements fondamentaux sur sa topologie,
2. Δt est un retard déterminé de telle sorte qu'il ne coïncide pas avec l'une des périodes caractéristiques du système mécanique (dans notre cas : $(1/f_1)$ ou $(1/f_2)$), et que la topologie du portrait de phase résultant apparaisse clairement.

Cette démarche proposée par Swinney s'est avérée déterminante pour mettre en évidence les propriétés de transition vers le chaos pour de multiples configurations : écoulement de Couette-Taylor (Fenstermacher *et al* [1979]), réaction chimique de Belousov-Zhabotinskii (Swinney [1983]), convection Rayleigh-Bénard (Dubois et Bergé [1981]), ...etc.

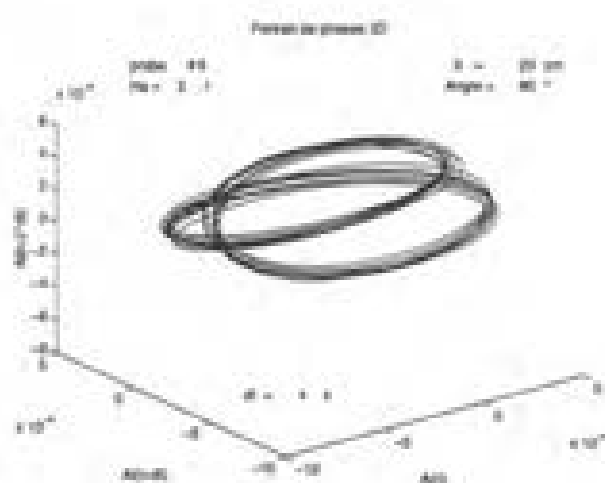
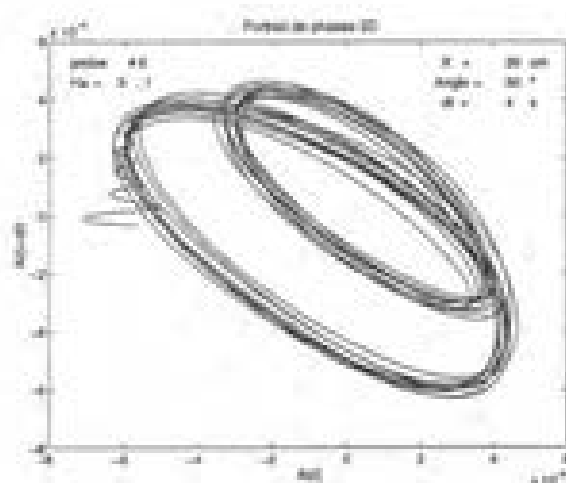
Sur la figure 17 sont représentés les portraits de phase 2-D et 3-D pour les nombres de Hartmann $Ha=3.11$, 2.82 et 1.28, construits à partir des signaux de température mesurés par la sonde thermocouple T_6 au point $(X=200 \text{ mm}, \Phi=90^\circ)$. Le choix de ce signal est justifié par le fait que toutes les fréquences caractéristiques du système sont représentées. Aucune variante topologique n'est à signaler entre les topologies des portraits de phase 2-D et des portraits de phase 3-D. Les propositions de Swinney s'appliquent donc parfaitement. Ces portraits de phase sont cohérents avec l'interprétation des DSP tenue auparavant. Pour un nombre de Hartmann $Ha=3.11$, l'écoulement déstabilisé présente un cycle limite monopériodique équivalent topologiquement à un cercle.

Sa forme en huit est caractéristique de la prépondérance de l'harmonique d'ordre 2 sur le signal associé. Autrement dit, les attracteurs associés, par exemple, aux fonctions dépendantes du temps suivantes : $\{\sin(2\pi f_1 t)\}$ et $\{\sin(2\pi f_1 t) + 2 \cdot \sin(4\pi f_1 t)\}$ sont respectivement un zéro et un huit plus ou moins déformés, c'est à dire, dans tous les cas, un tore T^1 de dimension 1. Une observation plus précise de cet attracteur conduit à se demander si l'aire non nulle de sa directrice autrement dit l'épaisseur de sa ligne génératrice, n'est pas due à la présence d'une deuxième fréquence incommensurable. Les deux explications suivantes non contradictoires sont possibles.

1. La première explication serait de conjecturer que le couplage non-linéaire entre champ de vitesse et champ de température est d'intensité modérée (Ra_2 modéré) et entraîne une synchronisation imparfaite entre les instabilités oscillantes longitudinales et transversales de fréquences égales à f_1 .

2. La deuxième explication, qui nous semble plus probable, consiste à envisager une faible modulation de l'amplitude et de la phase du signal de température mesuré due à la présence de structures stationnaires induisant un lent écoulement de dérive.

Pour un nombre de Hartmann de valeur égale à 2.82, la DSP exhibe un pic fréquentiel supplémentaire à la fréquence f_2 , et le portrait de phase associé prend définitivement la forme d'un tore T^2 , caractéristique d'un régime bi-périodique : les trajectoires se croisent tout en balayant plusieurs fois la génératrice du tore. Ce tore T^2 se déstabilise très rapidement par l'émergence d'un régime chaotique pour lequel le portrait de phase associé, réalisé à $Ha=1.28$, présente une topologie compliquée.



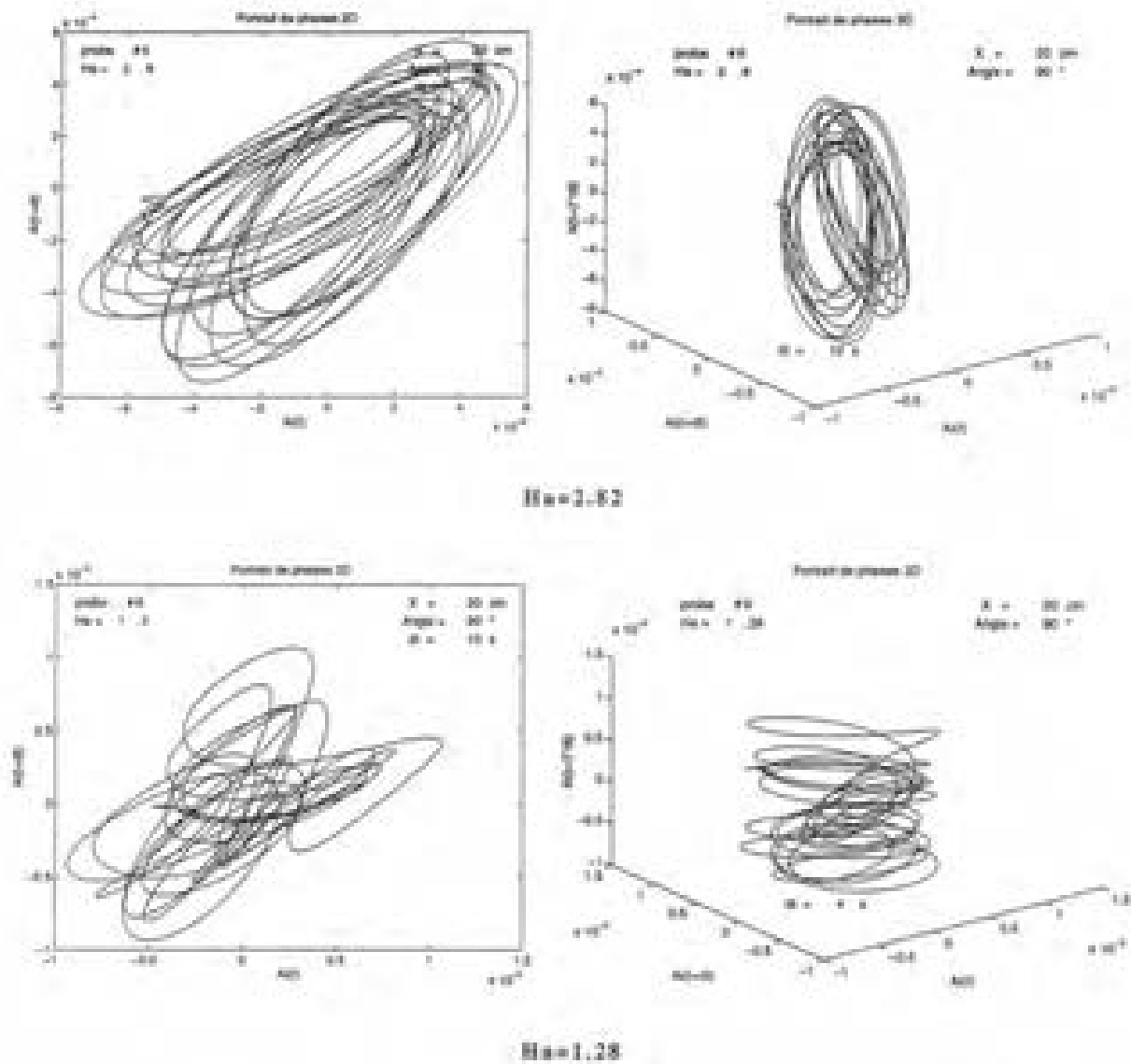


Figure 17. Portraits de phase 2-D et 3-D : transition d'un tore T^1 à un tore T^2 puis déstabilisation vers un attracteur étrange.

Finalement, cette transition vers le chaos, par perte de stabilité d'un tore T^2 , n'est pas véritablement une surprise : pour d'autres écoulements, ce scénario de transition a déjà été mis en évidence. Citons par exemple, l'écoulement de Couette-Taylor (Fenstermacher *et al* [1979]) ou bien l'écoulement de convection Rayleigh-Bénard (Dubois et Bergé [1981]). Pour le cas de cette configuration différentiellement chauffée, il nous semble que ce scénario de transition mis en évidence par l'outil expérimental constitue une nouvelle illustration de la possibilité de créer un chaos à partir d'un nombre fini de bifurcations. Un autre point original à mentionner dans cette étude, concerne la faible importance des termes non-linéaires des équations de Navier-Stokes. La dernière bifurcation vers le chaos n'est guidée que par un seul paramètre de contrôle pondérant les termes non-linéaires de l'équation de l'énergie : le nombre de Rayleigh effectif Ra_2 défini par la relation $Ra_2 = Pr Gr / [Ha^2 - 1]$.

5. Conclusion

La transition vers la turbulence d'un écoulement de convection naturelle MHD est étudiée expérimentalement pour le cas d'un cylindre horizontal chauffé différentiellement. Cette investigation expérimentale porte sur un fluide de faible nombre de Prandtl : le mercure. Deux familles d'instabilités sont mises en évidence : des instabilités stationnaires et instationnaires. Deux études théoriques de stabilités linéaires (Kaddeche [1995] et Bojarevics [1994]), qualitativement convergentes, prédisent que les instabilités stationnaires prennent la forme de cellules convectives bidimensionnelles, d'axes parallèles aux extrémités chauffées, et que les instabilités instationnaires s'apparentent à des ondes oscillantes liés à la présence de rouleaux tridimensionnels d'axes perpendiculaires aux extrémités de la cavité.

Ce travail expérimental, concentré sur la zone centrale de la cavité cylindrique, mène aux conclusions suivantes.

1. Les modes instationnaires les plus instables sont associés à deux ondes oscillantes qui apparaissent et disparaissent simultanément pour des nombres de Hartmann différents Ha_1^* et Ha_2^* . L'une est une onde oscillante stationnaire transversale 2-D, l'autre est une onde oscillante longitudinale 3-D progressive. La bifurcation qui guide ces instabilités instationnaires est sous-critique. Les processus de stabilisation et de déstabilisation de ces deux ondes par le champ magnétique permanent vertical suivent, respectivement, les lois d'échelle : $Gr_{dT} \sim Ha^2$ et $Gr_{dT} \sim Ha$. La forme caractérisée de ces ondes oscillantes s'explique bien par la présence d'un fort couplage non-linéaire entre les champs de température et de vitesse via les termes non-linéaires de l'équation de l'énergie.

2. Deux gammes de nombres de Grashoff sont distinguées. Pour les nombres de Grashoff modérés, Gr_{dT} de l'ordre de 10^4 - 10^5 , il semble que des instabilités stationnaires apparaissent avant les ondes oscillantes longitudinale et transversale. Ce résultat confirmerait la prédiction analytique de Bojarevics [1994]. Pour les nombres de Grashoff importants, Gr_{dT} de l'ordre de 10^6 ou plus, ces instabilités stationnaires et les ondes oscillantes longitudinale et transversale interagissent de manière concomitante durant la transition.

Pour un nombre de Grashoff modéré $Gr_{4,7K} \sim 2.63 \cdot 10^5$, les modes stationnaires sont presque gelés par la géométrie : une étude complète de la transition vers le chaos est alors réalisée. Les résultats expérimentaux obtenus sont les suivants.

3. Le paramètre de contrôle de la transition est identifié à un nombre de Rayleigh effectif Ra_2 qui prend en compte, en plus de la force motrice (la flottabilité), les deux puits dissipatifs d'énergie mécanique que sont l'effet Joule et la dissipation visqueuse.

Ce nombre Ra_2 s'exprime par la relation :

$$Ra_2 = Pr \cdot Gr_0 / [Ha^2 - 1].$$

4. Aux deux ondes oscillantes longitudinale et transversale mises en évidence dans le cas général, vient se superposer lorsque Ra_2 augmente, une onde oscillante longitudinale stationnaire. La bifurcation qui régit son apparition est une bifurcation supercritique de Hopf.

5. Pour ce nombre de Grashoff modéré, il est établi que la turbulence surgit par déstabilisation d'un tore T^2 . La présence d'une pente moyenne négative visible sur les densités spectrales nous amène à penser qu'un lent processus sans période clairement définie influence faiblement cette transition vers le chaos. Ce phénomène peut être interprété comme la déformation ou la migration lente d'instabilités stationnaires. De telles instabilités stationnaires peuvent s'identifier à des cellules convectives marginales 2D (Bojarevics[1994]) ou bien s'apparenter à des écoulements recirculants tertiaires, induits par la distribution de température. Dans tous les cas, il en résulte une faible modulation de la phase et/ou de l'amplitude des ondes oscillantes.

Finalement, nos résultats expérimentaux montrent que pour des nombres de Grashoff importants, l'écoulement laminaire et stationnaire se déstabilise vers un chaos spatio-temporel. Si le nombre de Grashoff reste modéré, l'écoulement se déstabilise d'abord vers un chaos temporel. Dans ce cas particulier, le chemin suivi par la transition est schématisé sur la figure 18. Néanmoins, la nature de la bifurcation engendrant les instabilités stationnaires demeure inconnue.

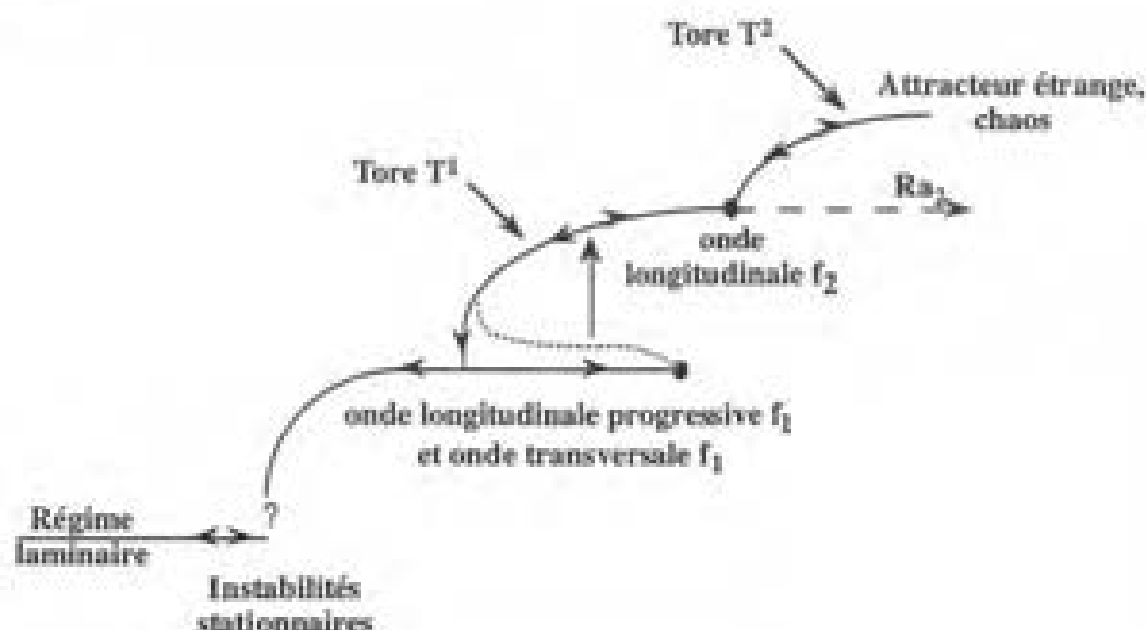


Figure 18.

CONCLUSION

Des écoulements de convection naturelle sous champ magnétique permanent et vertical sont étudiés dans ce mémoire. Nous mettons en évidence les nombres adimensionnels essentiels dans ce problème où quatre phénomènes sont *a priori* susceptibles de présenter un couplage. Pour le cas de la croissance cristalline sous champ magnétique (contexte de notre travail), quatre grandeurs peuvent diffuser : la vitesse, la température, la concentration en soluté et le champ magnétique. A l'échelle du laboratoire ou d'un prototype industriel, le nombre de Reynolds magnétique est très petit devant un. En outre, la diffusivité magnétique est très grande devant les autres diffusivités du problème. Par suite, le couplage MHD peut être considéré comme faible, et le champ magnétique demeure très voisin de celui que l'on obtiendrait dans un fluide au repos. Une autre source de simplification trouve sa justification dans la très faible concentration et la très faible diffusivité relative des espèces chimiques en solution. Ces propriétés physiques impliquent de très grands nombres de Schmidt, un transport du soluté dominé par la convection et aucune influence en retour de la concentration solutale sur l'écoulement. En conséquence, pour le spécialiste de solidification et dans ce cadre particulier, le champ de vitesse peut être perçu comme une donnée initiale pour le calcul de la ségrégation solutale. Pour toutes ces raisons, notre étude s'est concentrée sur la convection **thermogravitaire** MHD dans les configurations G-H.

Notre effort s'est d'abord porté vers des études réalisées à nombre de Hartmann asymptotiquement élevé ($Ha \gg 1$). Il nous a semblé essentiel de rappeler des résultats antérieurs issus de modélisations analytiques (Alboussière *et al* [1994]) et numériques (Ben Hadid *et al* [1994]). L'analyse de cette littérature récente a permis de souligner l'importance du point de vue 3-D pour la prédiction du circuit électrique. En effet, seule la connaissance du circuit électrique permet de statuer sur le caractère électriquement actif des couches de Hartmann. Dans le cas où les couches de Hartmann sont électriquement actives, le courant électrique créé par l'interaction entre le champ de vitesse et le champ magnétique imposé se referme dans les couches de Hartmann (et non pas dans le cœur MHD). Par suite, la loi d'échelle portant sur le champ de vitesse dans le cœur MHD de l'écoulement ($u \sim 1/Ha$) ne résulte pas simplement de l'équilibre entre le couple moteur de l'écoulement, égal au rotationnel de la force de flottabilité, et le couple de freinage électromagnétique, égal au rotationnel de la force de Laplace. Nous montrons que ce dernier équilibre ne délivre la bonne loi d'échelle du champ de vitesse ($u \sim 1/Ha^2$) que dans le cas où les couches de Hartmann sont électriquement inactives. Alors un point de vue 2-D modélise de manière satisfaisante ce problème. Parmi les situations possibles conduisant à la nécessité d'adopter un point de vue 3-D, nous citons les deux cas suivants :

- la présence d'une non-uniformité de champ magnétique,
- une cavité de section non parfaitement symétrique.

D'autre part, pour ces écoulements de convection thermogravitaire MHD, l'importance du point de vue 3-D peut être également mesurée avec la tendance anisotrope du champ magnétique imposé B_0 . Ce mémoire montre que pour des nombres de Hartmann suffisamment importants, c'est l'équilibre entre les rotationnels des forces de flottabilité et de Laplace qui pilote l'écoulement. Si le couple moteur $Gx \times g$, où Gx désigne le gradient de température horizontal, est aligné avec B_0 , alors les couches de Hartmann sont électriquement actives et le champ de vitesse peut se bidimensionnaliser dans tous plans orthogonaux à B_0 . Cette tendance à la bidimensionnalisation est enrayée dès que les directions des champs B_0 et $Gx \times g$ ne sont plus parallèles : c'est le cas de l'expérience MASCOT. La configuration G-H horizontale, cylindrique, impliquée dans l'expérience, présente une section **symétrique** et le champ magnétique appliqué est remarquablement **vertical et uniforme**. Toutes les conditions sont donc réunies pour l'obtention d'un freinage optimisé du champ de vitesse : $u \sim 1/Ha^2$.

L'étude menée dans ce mémoire, sur l'écoulement thermogravitaire stabilisé et réorganisé par la MHD au sein de la configuration G-H de l'expérience MASCOT (chapitre III), nous a permis de valider l'importance de deux autres nombres adimensionnels :

- la valeur et la direction par rapport à la gravité, de l'élanement ϵ , caractéristique de la cavité étudiée et source d'une nouvelle anisotropie,
- le nombre de Rayleigh modifié Ra_Q .

L'élanement ainsi que le nombre de Rayleigh modifié Ra_Q , mis en évidence par Cowley [1994], exercent une influence notable sur la sélection du régime thermique finalement obtenu. L'écriture de Ra_Q est dépendante de la loi d'échelle s'appliquant sur le champ de vitesse. Pour le cas de l'expérience MASCOT, les couches de Hartmann ne sont pas électriquement actives, le nombre de Rayleigh modifié s'écrit donc sous la forme :

$$Ra_Q = Pr Gr / Ha^2.$$

Une partie de notre travail a consisté à prendre en compte le caractère anisotrope de la configuration G-H ainsi que la pertinence du nombre de Rayleigh modifié. Le groupement adimensionnel $\epsilon(Pr Ra_{\Delta T})^{1/4}$ s'est alors naturellement affirmé lorsque l'élanement est principalement horizontal. Le nombre de Rayleigh effectif $Ra_{\Delta T}$ présente l'intérêt de posséder un sens lorsque le régime est convectif ou très convectif. Ce groupement adimensionnel suffit donc à statuer sur la présence d'un régime de couches limites thermiques, appelé régime thermique III dans ce mémoire.

Les études expérimentale ($\varepsilon = 0.05$) et numérique ($\varepsilon = 0.25$) menées sur l'écoulement stationnaire au sein de configurations G-H horizontales ont permis d'apporter une caractérisation des deux régimes thermiques précédents en présence d'un champ magnétique permanent. L'éclatement étant fixé, la transition d'un régime thermique III vers un régime thermique II est mise en évidence lorsque le nombre de Rayleigh modifié diminue. Ce comportement est en outre cohérent avec une diminution du nombre adimensionnel $\varepsilon(\text{Pr Ra}_{\Delta T})^{1/4}$. Dans tous les cas, un gradient de température horizontal et uniforme s'applique sur la région centrale de la cavité, définie comme le cœur. Nous montrons que ce gradient axial de cœur est à l'origine de la circulation de Hadley lorsque le régime n'est pas pleinement convectif.

Régime de cœur

Ce régime, caractérisé par la présence d'un régime établi dans le cœur, est obtenu si la condition $\varepsilon(\text{Pr Ra}_{\Delta T})^{1/4} \ll 1$ est réalisée, c'est à dire si le nombre de Rayleigh effectif ou l'éclatement horizontal sont suffisamment faibles. Nous apportons alors une confirmation expérimentale des lois d'échelle portant sur les champs de vitesse u , de température T , et de potentiel électrique Φ , si la condition $Ha \gg 1$ est respectée :

$$u \sim Gr_G / Ha^2 ,$$

$$T \sim \text{Pr} Gr_G / Ha^2 ,$$

$$\Phi \sim 1 / Ha ,$$

De plus, une méthode globale et directe d'évaluation des transferts de chaleur est étalonnée et validée : elle consiste à mesurer le nombre de Nusselt Nu associé à l'écoulement. Nous montrons que le nombre Nu est proportionnel au carré du nombre de Rayleigh modifié dès que la condition $Ra_G \ll 1$ est remplie. Cependant, les conditions expérimentales pour l'obtention d'un régime de cœur sont à peine réunies sur l'expérience MASCOT. Par conséquent, la validation du modèle analytique de Cowley [1994] est menée sur le cœur jusqu'à l'ordre $O(Ra_G)$ lorsque $Ra_G \sim 0.1-1$. L'investigation expérimentale met notamment en évidence la présence d'un écoulement secondaire à quatre vortex dans les sections situées dans le cœur établi. En plus de la distribution de température sinusoïdale autour de la section centrale de la cavité, due à la circulation de Hadley, cet écoulement secondaire induit l'existence d'un mode supplémentaire de faible amplitude. L'évolution de ce mode est en accord avec deux modèles théoriques (Cowley [1993] et Cowley [1994]) établis si le niveau de convection est important ou bien très faible.

Transition d'un régime de couches limites vers un régime de coeur

Notre travail, en plus d'une comparaison et d'une validation de modèles analytiques et numériques disponibles, constitue également une caractérisation de régimes thermiques modérément convectifs. Ces régimes sont intermédiaires entre un régime de coeur et un régime de couches limites thermiques pleinement développé et caractérisé par :

- un écoulement concentré à l'intérieur des couches limites thermiques (jets de parois),
- un coeur stratifié, quasi-stagnant.

Lors de la transition de l'écoulement vers un régime de coeur, des mesures précises de potentiels électriques mettent en évidence, sur les gammes du nombre de Hartmann et du nombre de Grashoff : $Ha = 0-100$, $Gr_{\Delta T} = 10^4-10^6$, un rôle non négligeable de l'inertie dans les régions d'extrémités. Cette observation confirme le fait que le critère de disparition d'un régime de couches limites, $\varepsilon(Pr Ra_{\Delta T})^{1/4} < 1$, mis en place à partir de l'équilibre entre inertie et flottabilité dans les couches limites thermiques d'extrémités, n'est pas illicite. Pour ces régimes intermédiaires, le développement des couches limites thermiques jouxtant les extrémités impose une rupture de la symétrie impaire suivant la verticale, portant sur les gradients axiaux de température. Une symétrie impaire par rapport au plan horizontal longitudinal de la cavité n'est obtenue que si le régime de coeur est pleinement développé. Par suite, un circuit électrique existe dans les régions hors-coeur voisines des extrémités, différent de celui prédit par Cowley [1994] pour un régime de coeur. Ce résultat est établi avec les distributions expérimentales de température et de potentiel électrique (chapitre III) et s'accorde avec les simulations numériques 3-D (chapitre IV).

Une suite à donner à ce travail pourrait être la mise au point d'un modèle analytique de l'écoulement thermogravitaire MHD pour ces régimes thermiques intermédiaires (probablement rencontrés dans les croissances cristallines où le nombre de Hartmann est modéré). Une méthode globale basée sur le raccordement asymptotique entre une solution pour le coeur et une solution pour la zone hors-coeur, serait un excellent point de départ.

Nos mesures - de température ou de potentiel électrique - s'accordent à souligner l'inactivité électrique des couches de Hartmann, que ce soit dans le coeur de l'écoulement ou dans les régions d'extrémités (où l'écoulement recircule). Ces résultats expérimentaux ainsi que la simulation numérique 3-D viennent donc consolider le fait que la couche d'extrémité accepte et rejette passivement le courant électrique produit par le coeur MHD.

Mentionnons que la technique simple mais efficace, développée au cours de cette thèse pour évaluer le nombre de Nusselt, est un bon moyen de diagnostiquer expérimentalement l'activité électrique des couches de Hartmann dans le coeur de l'écoulement.

L'étude expérimentale de la transition vers la turbulence pour l'écoulement thermogravitaire MHD de l'expérience MASCOT, constitue une autre part importante de nos investigations. Les mesures de température font apparaître une stabilisation de l'écoulement pour des valeurs du nombre de Hartmann assez modérées : $Ha \sim 1-10$. L'écoulement stationnaire se déstabilise d'abord sous la forme d'instabilités oscillantes (lorsque l'intensité du champ magnétique diminue) avant de devenir turbulent. Juste après le seuil critique, ces instabilités oscillantes sont caractérisées par une onde oscillante progressive 3-D dans le plan vertical longitudinal et par une onde transversale oscillante stationnaire dans le plan horizontal longitudinal. Leurs fréquences d'oscillation sont identiques et notées f_1 . A la déstabilisation puis à la stabilisation de l'écoulement est associé un hystérésis, qui suggère la présence d'une transition sous-critique. Le diagramme de stabilité mis en place dans cette étude montre que la loi d'échelle $Gr_{dT} \sim Ha^2$ contrôle la stabilisation stationnaire de l'écoulement. Le couplage non-linéaire entre le champ de vitesse et le champ de température explique la forme plus ou moins enrichie par une harmonique, du signal de température associé à l'onde oscillante longitudinale progressive. Pour des nombres de Grashoff inférieurs à 10^6 , avant la déstabilisation instationnaire de l'écoulement, des instabilités stationnaires sont présentes ; elles pourraient s'apparenter à des cellules marginales 2-D si les théories linéaires de stabilité de Bojarevics [1994] et Kaddeche [1995] étaient prises en compte. Pour des nombres de Grashoff supérieurs à 10^6 , ces modes stationnaires sont libres d'évoluer selon la direction horizontale privilégiée par l'anisotropie associée à l'élancement de la cellule expérimentale. Instabilités stationnaire et instationnaire interagissent alors de manière concomitante ; cette interaction donne lieu à un écoulement turbulent.

Pour de faibles nombres de Grashoff ($Gr_{dT} = 2.63 \cdot 10^5$), les instabilités stationnaires sont quasi-gelées et le phénomène précédent n'a pas lieu. Nous avons donc entrepris une étude expérimentale plus formelle de la transition vers le chaos temporel. Après déstabilisation de l'écoulement stationnaire, les instabilités oscillantes susmentionnées sont observées. La densité spectrale du signal de température mesuré présente une pente globale négative qui suggère la présence d'instabilités quasi-stationnaires, faiblement dépendantes du temps. Puis, si le nombre de Hartmann diminue, une nouvelle onde longitudinale stationnaire, de basse fréquence f_2 , apparaît. Aucun hystérésis n'est détecté sur le seuil critique d'apparition de cette onde. D'ailleurs, la bifurcation qui régit son apparition ou sa disparition est une bifurcation supercritique de Hopf. Nous montrons que le paramètre de contrôle de cette bifurcation doit être choisi égal au nombre de Rayleigh effectif Ra_2 , défini par l'expression :

$$Ra_2 = Pr Gr_G / [Ha^2 - 1].$$

Le portrait de phase associé au signal de température après cette seconde bifurcation est un tore T^2 basé sur les deux fréquences f_1 et f_2 . Lorsque le signal devient chaotique, ce tore T^2 se déstabilise vers un attracteur étrange.

Deux suites intéressantes à ce travail nous semblent envisageables.

Une méthode de visualisation directe et adaptée aux fluides opaques (rayons X par exemple) permettrait de conclure définitivement sur la nature et la valeur du seuil critique du nombre de Grashoff $Gr_{\Delta T}$ lors de la transition de l'écoulement stationnaire MHD vers un écoulement déstabilisé mais stationnaire. La faible dépendance temporelle de ces instabilités quasi-stationnaires (à nombres de Grashoff $Gr_{\Delta T}$ modérés) ainsi que leur interaction avec les ondes oscillantes (à nombres de Grashoff $Gr_{\Delta T}$ élevés) pourraient être en même temps examinées.

Le développement d'une théorie non-linéaire est incontournable pour décrire et prédire cette transition vers un écoulement instationnaire. Fortement inspirée du formalisme d'enveloppe (Manneville [1991]) et tenant compte de ces résultats expérimentaux, cette théorie rendrait compte, pour les nombres de Grashoff modérés :

- d'une première bifurcation sous-critique,
- d'une deuxième bifurcation supercritique, contrôlée par le nombre de Rayleigh Ra_2 ,
- et d'une faible dépendance temporelle de l'amplitude ou de la phase des ondes oscillantes progressive et stationnaire impliquées dans cette transition vers le chaos.

Annexe 1

Calculs des incertitudes relatives.

Dans cette annexe, nous regroupons les calculs d'erreurs relatives associées aux mesures de températures et de potentiels électriques présentées dans les chapitres expérimentaux III et V. Ces erreurs relatives figurent sous la forme de barres verticales ou horizontales. L'imprécision sur ces mesures, ainsi que la variation des caractéristiques physiques du mercure en fonction de la température, entraînent des erreurs relatives sur les nombres de Grashoff, de Hartmann, de Rayleigh et de Nusselt, calculés au centre de la cellule.

1. Erreurs relatives sur les caractéristiques physiques

Ces erreurs sont calculées en prenant en compte une variation de 5 Kelvins sur la température définie au centre de la cellule.

viscosité moléculaire	$\frac{\delta \nu}{\nu}$	- 3.5 %
coefficient d'expansion volumique	$\frac{\delta \beta}{\beta}$	négligeable
densité	$\frac{\delta \rho}{\rho}$	- 0.18 %
conductivité électrique	$\frac{\delta \sigma}{\sigma}$	- 0.9 %
conductivité thermique	$\frac{\delta \lambda}{\lambda}$	- 2.7 %
diffusivité thermique	$\frac{\delta \alpha}{\alpha}$	- 3.08 %
chaleur massique	$\frac{\delta C_p}{C_p}$	- 0.24 %

2. Incertitude sur le nombre de Hartmann.

Le faible défaut d'uniformité (au plus égal à 1.8 %) du champ magnétique B_0 , imposé, ainsi que la compensation de l'aimantation rémanente dans l'électro-aimant, impliquent une erreur relative sur B_0 estimée à : $\frac{\delta B_0}{B_0} \sim 2.5 \%$

Sachant que l'imprécision sur l'échelle de longueur est inférieure à 0.05%, nous pouvons estimer l'erreur relative commise sur le nombre de Hartmann Ha :

$$\frac{\delta Ha}{Ha} \sim \frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta \sigma}{\sigma} + \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta v}{v} \right\} + \frac{\delta R_o}{R_o} + \frac{\delta B_o}{B_o}.$$

d'où
$$\frac{\delta Ha}{Ha} \sim 4.84 \, \%.$$

3. Incertitudes sur les nombres de Grashoff $Gr_{\Delta T}$ et Gr_G

La distribution de température le long des génératrices de la cellule est linéaire sur le coeur. A cette évolution linéaire est associé le gradient axial de température G , calculé par la relation :

$$G = \frac{T_{x=300 \text{ mm}}(\alpha) - T_{x=100 \text{ mm}}(\alpha)}{300 \text{ mm} - 100 \text{ mm}}.$$

L'erreur expérimentale absolue sur les mesures de température est évaluée par reproductibilité. Cette erreur, $\delta T = 0.1 \text{ K}$, est faible puisque le protocole de mesure élimine les incertitudes liées à la chaîne de traitement analogique des signaux. Par suite, l'incertitude relative sur le gradient de température G , notée $\frac{\delta G}{G}$, est du même ordre de grandeur que l'incertitude sur la température $\frac{\delta T}{T}$:

$$\frac{\delta G}{G} \sim \frac{\delta T}{T} \sim 4 \, \%.$$

L'incertitude sur le nombre de Grashoff Gr_G est alors évaluée par la relation :

$$\frac{\delta Gr_G}{Gr_G} \sim \frac{\delta \beta}{\beta} + \frac{\delta G}{G} + \frac{2 \delta v}{v},$$

soit,

$$\frac{\delta Gr_G}{Gr_G} \sim 11 \, \%.$$

L'écart de température entre les deux fronts est réglé à $1/100 \text{ K}$. Par contre, sa mesure est réalisée au moyen d'un thermomètre classique. L'erreur expérimentale absolue commise sur ΔT et la valeur minimale de ΔT sont donc, respectivement, de l'ordre de $1/10 \text{ K}$ et 4 K . Par suite, l'incertitude relative maximale sur ΔT peut être estimée à :

$$\frac{\delta(\Delta T)}{\Delta T} \sim 2.5 \, \%.$$

De cette dernière évaluation est déduite l'incertitude relative sur le nombre de Grashoff $Gr_{\Delta T}$:

$$\frac{\delta Gr_{\Delta T}}{Gr_{\Delta T}} \sim \frac{2\delta v}{v} + \frac{\delta \Delta T}{\Delta T} \sim 9.5 \%,$$

4. Incertitudes relatives sur les nombres de Rayleigh $Ra_{\Delta T}$ et Ra_G

Le raisonnement précédent est reproduit et débouche sur les incertitudes relatives suivantes :

$$\frac{\delta Ra_{\Delta T}}{Ra_{\Delta T}} \sim \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta G}{G} + \frac{\delta \sigma}{\sigma} + \frac{\delta \alpha}{\alpha} + 2 \frac{\delta B_o}{B_o},$$

soit,

$$\frac{\delta Ra_{\Delta T}}{Ra_{\Delta T}} \sim 13.2 \%,$$

et

$$\frac{\delta Ra_G}{Ra_G} \sim \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{\delta(\Delta T)}{\Delta T} + \frac{\delta \sigma}{\sigma} + \frac{\delta \alpha}{\alpha} + 2 \frac{\delta B_o}{B_o},$$

soit,

$$\frac{\delta Ra_G}{Ra_G} \sim 11.7 \%,$$

5. Incertitudes relatives sur les nombres de Nusselt

Au chapitre II et III, le calcul des nombres de Nusselt Nu_1 et Nu_2 , est basé sur des mesures de température. L'évaluation directe des transferts de chaleur conduit au nombre de Nusselt Nu_1 , calculé à partir de l'élévation ou de la diminution de température δT , mesurée à l'aide d'un thermocouple. Ces variations de température sont occasionnées dans l'eau de régulation des fronts s'écoulant avec le débit massique : Q_{eau} . La puissance thermique totale Q_{tot} , mesurée pour un régime thermique quelconque, s'exprime par la relation :

$$Q_{\text{tot}} = Q_{\text{eau}} C_{p\text{eau}} \delta T.$$

Cette relation fait intervenir les incertitudes relatives suivantes :

$$\frac{\delta Q_{\text{eau}}}{Q_{\text{eau}}} \sim 2 \%,$$

$$\frac{\delta(\delta T)}{\delta T} \sim 5 \% \text{ (évaluée par reproductibilité),}$$

$$\frac{\delta C_{p\text{eau}}}{C_{p\text{eau}}} \sim \text{négligeable.}$$

Finalement, l'incertitude relative cherchée est : $\frac{\delta Q_{tot}}{Q_{tot}} \sim 7 \%$.

Puis, à partir de ces considérations, l'incertitude relative $\frac{\delta Nu_1}{Nu_1}$, est calculée par la relation :

$$\frac{\delta Nu_1}{Nu_1} \sim 2 \frac{\delta Q_{tot}}{Q_{tot}} \sim 14 \%$$

L'évaluation du nombre de Nusselt Nu_2 , est menée à partir des distributions expérimentales de températures mesurées autour du cercle central (amplitude de la distribution : $\delta\theta$) et le long des génératrices de la cellule cylindrique (gradient de température axial sur le coeur : G). L'expression de Nu_2 s'écrit :

$$Nu_2 = \frac{G}{G_c} \left[1 + \frac{7}{24} \frac{(\delta\theta)^2}{(GR_c)^2} \right].$$

Après quelques calculs basés sur un développement de Taylor au premier ordre, l'incertitude relative sur le nombre Nu_2 s'exprime par la relation suivante :

$$\frac{\delta Nu_2}{Nu_2} \sim 2 \frac{\delta G}{G} + \frac{2 |Nu_2 - \frac{G}{G_c}|}{Nu_2} \left\{ \frac{\delta(\delta\theta)}{\delta\theta} + \frac{\delta G}{G} \right\},$$

soit,

$$\frac{\delta Nu_2}{Nu_2} \sim 8 \% + 10 \% \frac{|Nu_2 - G/G_c|}{Nu_2}.$$

6. Incertitude relative sur la vitesse axiale U .

La composante axiale de la vitesse U , est évaluée à partir de la distribution de potentiel électrique [$\phi(45^\circ)$ - $\phi(135^\circ)$] (dans le cercle central de la cellule), et à partir de la loi d'Ohm projetée sur la direction transversale Y :

$$U \sim \frac{\phi(45^\circ) - \phi(135^\circ)}{B_0 R_0}.$$

L'incertitude sur la mesure du potentiel électrique est principalement liée au gain de la chaîne de traitement analogique impliquée. Ce gain possède une valeur moyenne égale à 1950 à $\pm 5\%$. Il ressort donc de cette analyse que l'ordre de grandeur de l'incertitude relative pour la vitesse axiale U est :

$$\frac{\delta U}{U} \sim \frac{\delta(\phi(45^\circ) - \phi(135^\circ))}{(\phi(45^\circ) - \phi(135^\circ))} + \frac{\delta B_0}{B_0},$$

soit,

$$\frac{\delta U}{U} \sim 12.5 \%$$

Annexe 2

Justifications des modifications apportées à l'expérience MASCOT dans le cadre de l'investigation expérimentale de la transition vers la turbulence.

Dans cette annexe, nous regroupons des estimations en ordre de grandeur pour certains phénomènes qui, potentiellement, auraient pu être à l'origine de perturbations sur les mesures réalisées dans le cadre de l'étude expérimentale de la transition vers la turbulence. Nous montrons comment, si le champ magnétique B_0 n'est pas diminué ou augmenté lentement, des variations du flux de B_0 sont responsables de courants électriques perturbants et non contrôlés. Puis nous justifions le fait que dans le centre de la cellule, les courants thermoélectriques liés à l'interface entre la double sonde mobile (DSM) en inox et le mercure peuvent être considérés comme négligeables par rapport aux courants d'origine MHD. Finalement, nous montrons que les instabilités oscillantes mises en évidence dans cette étude ne peuvent pas être dues à la présence d'ondes d'Alfvén.

1. Variation du flux de B_0

Le rotationnel de la loi d'Ohm permet d'exprimer de manière plus simple le flux du champ magnétique B_0 à travers la plus grande surface de mercure dans la cavité. Compris dans le plan XY, le contour de cette surface S_{XY} est désigné par la notation C dans la relation ci-dessous :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \oint_C \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{s} - \oint_C \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} ,$$

où $d\mathbf{s}$ est le segment infinitésimal orienté sur le contour C. Il s'agit de vérifier que le terme

$\oint_C \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{s}$ (phénomène MHD) est plus important en ordre de grandeur que le terme $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$

(phénomène difficile à contrôler *a priori*). Comme mentionné dans le chapitre V, le champ magnétique varie par très petit pas δB_0 , c'est à dire de $4 \cdot 10^{-5}$ T toutes les 10 secondes. Ce pas incrémental n'est pas étalé sur les 10 secondes, mais sur une durée τ bien plus faible. Cette durée τ est estimée par visualisation sur oscilloscope du changement de consigne portant sur le courant circulant dans l'électro-aimant, source du champ magnétique. Le régime transitoire associé au changement de consigne du courant est mesuré de l'ordre de $\tau \sim 100$ ms. En supposant que le flux Φ du champ magnétique vertical passe à travers la surface horizontale de

mercure S_{XY} , de l'ordre de $(L \cdot 2R_0)$. L'ordre de grandeur du terme $\frac{\partial \phi}{\partial t} \left(= \frac{\delta B_0 \cdot S_{XY}}{\tau} \right)$ est estimé à $6.4 \cdot 10^{-6}$ SI. En outre, une estimation typique de la densité de courant d'origine MHD dans le domaine fluide est :

$$\oint_C \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0 \cdot d\mathbf{s} = 10^{-3} \text{ m/s} \cdot 10^{-2} \text{ T} \cdot [0.8 + 0.08] \text{ m} = 10^{-5} \text{ SI}$$

La différence en ordre de grandeur entre ces deux termes est peu marquée, mais en diminuant l'amplitude du pas δB_0 , des phénomènes observés tels que les seuils critiques de déstabilisation ne sont pas modifiés. Une explication de cette observation peut provenir de la diffusion très rapide de toute perturbation du champ magnétique. En effet, le nombre de Reynolds magnétique R_m est très faible sur l'expérience MASCOT. Par suite, le temps de diffusion magnétique τ_m , estimé à $R_0^2 \mu \sigma = 5 \cdot 10^{-4} \text{ s}$, est très petit devant les temps de diffusion thermique ou de diffusion de la quantité de mouvement.

2. La double sonde mobile : obstacle électrique, thermo-électrique ?

L'axe de la double sonde mobile (DSM) est un tube creux en inox dont la conductivité électrique σ , de l'ordre de $10^6 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$, est semblable à celle du mercure. A l'échelle de la DSM (diamètre de 3 mm), le nombre de Hartmann est au plus de l'ordre de l'unité. Des effets tels que couches de Hartmann ou bien encore couche parallèle jouent donc un rôle négligeable dans le circuit électrique. Une interrogation demeure cependant : en présence du champ magnétique extérieur imposé B_0 , est-ce que des courants d'origine thermo-électrique pourraient être créés par la présence de cette interface inox-mercure et pomper un écoulement perturbateur de fluide. En nous basant sur le schéma de principe de la figure 1 et en supposant que les résistances électriques de contact entre inox et mercure sont nulles, nous proposons l'analyse des ordres de grandeur suivante afin d'écarter cette éventualité.

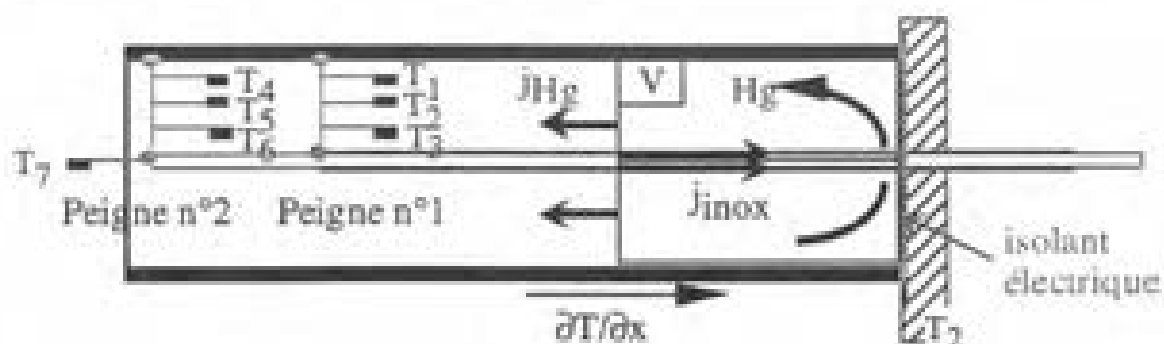


Figure 1.

Les positions occupées par la DSM sont localisées dans la zone de régime établi où le gradient de température axial $\partial T/\partial x$ orienté suivant l'axe de la DSM est égal à G . L'ordre de grandeur de G pendant la transition est faible et atteint au plus 10 K/m. Comme on peut le voir sur la figure 1, j_{Hg} , j_{inox} et P désignent, respectivement, les courants d'origine thermo-électrique dans le mercure et le tube en inox, et le pouvoir thermoélectrique relatif de l'inox par rapport au mercure (environ 5.10^{-6} V/K). Les composantes tangentielles de la densité de courant de part et d'autre de l'interface j_{Hg} et j_{inox} vérifient à l'interface (en absence de toute résistance électrique de contact) la loi phénoménologique suivante (effet Seebeck) :

$$j_{Hg}/\sigma_{Hg} - j_{inox}/\sigma_{inox} = -P \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot x, \quad (2.1)$$

où $\partial T/\partial x$, x , σ_{Hg} et σ_{inox} désignent respectivement le gradient de température, l'abscisse curviligne le long de l'interface orientée suivant la direction x et les conductivités électriques du mercure et de l'inox. En supposant une distribution axisymétrique pour les densités de courant d'origine thermoélectrique autour et dans le tube inox puis en appliquant la loi de conservation sur la densité de courant au volume V en forme de tore (figure 1), on obtient la relation (2.2). Cette relation tient compte du fait que la paroi longitudinale du cylindre de pyrex ainsi que la couverture de téflon collée sur l'extrémité chaude réalisent une condition limite de densité de courant normale nulle.

$$|j_{Hg}| R_o = |j_{inox}| e \quad (2.2)$$

Les paramètres e et R_o sont respectivement l'épaisseur du tube d'inox (100.10^{-6} m) et le rayon du cylindre. En projetant la relation (2.1) sur la direction x puis en tenant compte de la relation (2.2), il est possible d'obtenir une expression de la densité de courant j_{Hg} (d'origine thermo-électrique) puis de comparer l'ordre de grandeur qui en découle à la densité de courant représentative de l'écoulement MHD étudié, typiquement égale à $\sigma_{Hg} U B_o$. Nous nous plaçons dans le cas où $U \sim 10^{-3}$ m/s et $B_o \sim 10^{-2}$ T.

$$|j_{Hg}| = -P \frac{\partial T}{\partial x} \frac{e \sigma}{(e + R_o)} = 0.25 \text{ SI avec } \sigma = \sigma_{Hg} = \sigma_{inox}$$

et

$$|\sigma u B_o| \approx 10 \text{ SI}$$

Ces ordres de grandeur, évalués dans des conditions sévères, démontrent que l'effet Seebeck peut être considéré comme négligeable pour nos études de stabilité.

3. Présence d'ondes d'Alfven ?

Il est sage de s'assurer que les oscillations de température mesurées ne sont pas imputables à la présence d'ondes d'Alfven se déplaçant suivant la direction du champ magnétique imposé B_0 (axe Z). Une introduction à ce phénomène est disponible dans la monographie de Moreau [1990]. Dans les métaux liquides comme le mercure, la dissipation de l'énergie mécanique associée à ces ondes, dont la célérité est $c=B_0/(\mu\sigma)^{1/2}$, est entièrement assurée par la diffusivité magnétique du milieu $1/\mu\sigma$: le terme de frottement visqueux dans les équations de Navier-Stokes n'est donc pas considéré. Si nous désignons par les notations b et u , les perturbations du champ magnétique B_0 et du champ de vitesse global engendrées par la présence éventuelle d'ondes d'Alfven, le système d'équations linéarisé au premier ordre qui décrit ce problème s'écrit :

$$\text{Equation de l'induction} \quad \frac{\partial b}{\partial t} + B_0 \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\mu\sigma} \Delta b, \quad (2.3)$$

$$\text{Navier - Stokes} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\mu\rho} B_0 \frac{\partial b}{\partial z}. \quad (2.4)$$

Comme il est d'usage pour une étude linéaire de perturbation, les expressions des variables perturbées b et u font intervenir le vecteur d'onde \vec{k} ainsi que la pulsation complexe ω :

$$b = \tilde{b} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)},$$

$$u = \tilde{u} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}.$$

En tenant compte de cette écriture, l'équation de dispersion associée au système d'équations (2.3) et (2.4) s'écrit de la façon suivante :

$$\omega^2 + i \frac{k^2}{\mu\sigma} \omega + \frac{(B_0 \cdot \vec{k})^2}{\mu\rho} = 0. \quad (2.5)$$

Nous écrivons la pulsation ω sous la forme $\alpha + i\beta$ et injectons cette écriture dans l'équation de dispersion (2.5). La partie imaginaire de l'équation de dispersion permet le calcul du taux d'amortissement β des ondes et par conséquent conduit à l'évaluation du temps caractéristique d'extinction des ondes d'Alfven t_{ext} :

$$\beta = -\frac{k^2}{2\mu\sigma},$$

$$t_{\text{ext}} = \frac{2\mu\sigma}{k^2}.$$

L'ordre de grandeur du temps caractéristique de propagation t_{pro} des ondes d'Alfven est estimé à partir de l'échelle de longueur caractéristique de la cellule de l'expérience, son rayon R_0 :

$$t_{pro} = \frac{R_0 \sqrt{\mu \sigma}}{B_0} = 0.2 \text{ s.}$$

Sachant que le vecteur d'onde \vec{k} est inversement proportionnel (à 2π près) à la longueur d'onde λ des ondes d'Alfven, l'observation de ces ondes n'est possible que si les temps d'extinction et de propagation sont du même ordre de grandeur (condition minimale requise). Cette condition mène à une longueur d'onde non physique : $\lambda \sim 20 \text{ m}$. Par conséquent, des ondes d'Alfven ne sont pas créées pendant la transition vers la turbulence de l'écoulement thermogravitaire MHD au sein de l'expérience MASCOT.

Références bibliographiques

Aboulaich R., Fortin M., Robichaud M. and Tanguy P. [1986]

Several iterative schemes for the solution of the Navier-Stokes equations, Finite element methods in Flow Problems, Antibes, 345 (1986).

Ahlers G., Cannel D. and Steinberg V. [1985]

Time dependence of flow patterns near the convective threshold in a cylindrical container, Phys. Rev. Lett., Vol. 54, 13, p. 1373

Alboussière T., Garandet J.P. and Moreau R. [1993]

Buoyancy driven convection with an uniform magnetic field", Part I : Asymptotic analysis ($Ha \gg 1$), J. Fluid Mech., 253, pp. 545

Alboussière T. [1994]

Magnétohydrodynamique et ségrégation solutale en croissance Bridgman horizontale, Thèse INP-Grenoble, France.

Alboussière T., Garandet J.P. and Moreau R. [1996]

Asymptotic analysis and symmetry in MHD convection, Physics of Fluids, Vol 8, n°8, p. 2215

Baumgartl J., Hubert A. and Müller G. [1993]

The use of magnetohydrodynamic effects to investigate fluid flows in electrically conducting melt, Phys. Fluids, A, 5 (12), pp. 3280-3289

Bejan A. and Tien C. L. [1978]

Laminar natural convection heat transfer in a horizontal cavity with different end temperatures, J. of Heat Transf., 100, pp. 641-647

Bejan A. [1994]

Convection Heat Transfer, Wiley & Sons, Inc.

Ben Hadid H. and Henry D. [1994]

Numerical simulation of convective three-dimensional flows in a horizontal Bridgman configuration under the action of a constant magnetic field, Proceeding of the Int. Conf. on Energy Transf. in MHD Flows, Sept. 26-30, Aussois, France

Ben Hadid H. and Henry D. [1996]

A paraître dans J. of Cryst. Growth

Bergé P., Pomeau Y. et Vidal Ch. [1992]

L'ordre dans le chaos, vers une approche déterministe de la turbulence, Collection enseignement des sciences, Hermann

Bertrand F., Gadbois R. and Tanguy P. [1992]

Tetrahedral elements for fluids flow, Int. J. Numer. Meth. Eng. 33, 1251

Bojarevics V. [1994]

Buoyancy driven flow and its stability in a horizontal rectangular channel with an arbitrary oriented transversal magnetic field, Proceeding of the Int. Conf. on Energy Transf. in MHD Flows, Sept. 26-30, Aussois, France

Bontoux P., Roux B., Schiroky G.H., Markham B. L., Rosenberger F. [1986]

Convection in the vertical midplane of a horizontal cylinder. Comparison of two-dimensional approximations with three-dimensionnal results, Int. J. Heat Mass Transf., 29, pp. 227-240

Brezzi R. [1974]

On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle - Point Problems Arising from Lagrangian Multipliers, RAIRO, Série Analyse Numérique, 8, 129

Busse F. H. and Clever R. M. [1992]

Stability of convection rolls in the presence of a vertical magnetic field, Phys. Fluids, 25(6), p. 931

Campbell T. A. and Koster J. N. [1994]

Visualization of liquid-solid interface morphologies in gallium subject to natural convection, J. Cryst. Growth, 140, pp. 414-425

Campbell T. A. and Koster J. N. [1995]

Radioscopic visualization of indium antimonide growth by the vertical Bridgman-Stockbarger technique, J. Cryst. Growth, 147, pp. 408-410

Cornack D. E., Leal L. G. and Imberger J. [1974]

Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. Part I. Asymptotic theory, J. Fluid Mech., 65, Part. 2, pp.209-229

Cowley M. D. [1993]

The effect of a buoyancy-driven magnetohydrodynamic flow on the temperature distribution in a horizontal cylinder, Appendix, rapport interne, laboratoire EPM-MADYLAM.

Cowley M. D. [1994]

The effect of a buoyancy-driven magnetohydrodynamic flow on the temperature distribution in a horizontal cylinder., Proceeding of the Int. Conf. on Energy Transf. in MHD Flows, Sept. 26-30, Aussois, France

Cowley M. D. [1995]

Natural convection in rectangular enclosures of arbitrary orientation with magnetic field vertical, MAHYD 95, 14th Int. RIGA Conf. on Magnetohydrodynamics, (August 24-26) Jurmala, LATVIA

Croquette V., Le Gal P., Pocheau A., and Guglielmetti R. [1986]

Large-scale flow characterization in a Rayleigh-Benard convective pattern, Europhys. Lett., 1 (8), p. 393

Cubbery W. H. [1979]

Metals Handbook II, 9th ed., ASM, pp.735-737

Davoust L., Moreau R., Bolcato R., Alboussière T., and Neubrand A.C. [1994]

Influence of a vertical magnetic field on convection in the horizontal Bridgman crystal growth configuration., Proceeding of the Int. Conf. on Energy Transf. in MHD Flows, Sept. 26-30, Aussois, France

Davoust L., Bertrand F., Moreau R., Tanguy P.A. and Bolcato R. [1995]

Recent results on MHD damped convection in the horizontal Bridgman configuration, MAHYD 95, 14th Int. RIGA Conf. on Magnetohydrodynamics, (August 24-26) Jurmala, LATVIA

Davoust L., Moreau R., Neubrand A.C. and Bolcato R. [1996]

Experimental results on the MHD convective flow in a horizontal cylinder, The eighth BEER-SHEVA Int. Seminar on MHD-Flows and Turbulence, (Fév. 25 - 29), Jerusalem, ISRAEL

Davoust L., Moreau R., Cowley M.D., Tanguy P.A. and Bertrand F. [1996-bis]

Numerical and analytical modelling of the MHD buoyancy-driven flow in a Bridgman crystal growth configuration, Workshop on Modelling in Crystal Growth, Darby, (Oct. 13-16), Belgium, soamis à J. of Cryst. Growth

Dubois M. et Bergé P. [1981]

Instabilités de couche limite dans un fluide en convection : évolution vers la turbulence, J. Physique, 42, p. 167

Eckert E. R. G. and Drake [1959]

Heat and Mass Transfer, 2^d ed., McGraw-Hill Book Company, New-York.

Fauve S. [1984]

Transition vers la turbulence des écoulements convectifs, J. de Mécanique théorique et appliquée, N° spécial, p. 45

Fenstermacher P. R., Swinney H. L. and Gollub J.P. [1979]

Dynamical instabilities and the transition to chaotic Taylor vortex flow, J. Fluid. Mech., 26, p. 10

Fortin M. et Glowinski R. [1982]

Méthodes de Lagrangien Augmenté, Dunod, Paris

Garandet J. P., Duffar T. and Favier J. J. [1990]

On the scaling analysis of the solute boundary layer in a idealised growth configurations, J. Cryst. Growth, 106, pp. 437-444

Garandet J. P., Rouzaud A., Duffar T. and Camel D. [1991]

Comparison between order of magnitude and numerical estimates of the solute boundary layer in a idealized horizontal Bridgman configuration, J. Cryst. Growth, 113, pp. 587-592

Garandet J. P., Alboussière T. and Moreau R. [1992]

Buoyancy driven convection in a rectangular enclosure with a transverse magnetic field, Int. J. Heat Mass Transf., 35, pp. 741-748

Gill A. E. [1966]

The boundary-layer regime for convection in a rectangular cavity, J. Fluid. Mech., 26, p. 515-536

Gill A. E. [1974]

A theory of thermal oscillations in liquid metals, J. Fluid. Mech., 64, p. 577-588

Harris F. J. [1978]

On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform, Proc. of the IEEE, 66, n° 1, p. 51

Hart J. E. [1979]

Note on Gill's solution for free convection in a vertical enclosure, J. Fluid Mech., 90, Part. 3, pp. 561-568

Hart J. E. [1983]

A note on the stability of low-Prandtl-number Hadley circulations, J. Fluid. Mech., 132, p. 271

Hart J. E. [1983]

Low Prandtl number convection between differentially heated end walls, Int. J. of Heat and Mass. Transf., 26, n°7, pp. 1069-1083

Hunt J. C. R. and Shercliff J.A. [1971]

Magnetohydrodynamics at high Hartmann number, Ann. Rev. Fluid Mech., 3, pp.37-62

Hurle D. T. J., Jakeman E. and Johnson C. P. [1974]

Convective temperature oscillations in molten gallium, J. Fluid. Mech., 64, p. 565

Imberger J. [1974]

Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls, Part 3. Experimental results", J. Fluid Mech., 65, Part. 2, pp.247-260

Kaddeche S. [1995]

Magnétohydrodynamique et ségrégation en configuration de Bridgman, Thèse LMFA - Ecole Centrale de Lyon, France

Kakimoto K., Eguchi M., Watanabe H. and Hibiya T. [1988]

Direct observation by X-ray radiography of convection of molten silicon in the Czochralski growth method, J. Cryst. Growth , 88, pp. 365-373

Khalili A., Venkatachalappa M., Subbaraya C. K. and Rath H. J.[1994]

Communication privée.

Kuo H. P. and Korpela S. A. [1988]

Stability and finite amplitude natural convection in a shallow cavity with insulated top and bottom and heated from the side, Phys. Fluids, 31 (1), p. 33

Langlois W. E. [1985]

Buoyancy-driven flows in crystal-growth melts, Ann. Rev. Fluid Mech., 17, pp. 195-215

Laure P. et Roux B. [1987]

Synthèse des résultats obtenus par l'étude de la stabilité des mouvements de convection dans une cavité horizontale de grande extension, C. R. Acad. Sci. Paris., 305, série II, p. 1137

Libchaber A., Fauve S. and Laroche C. [1983]

Two-parameter study of the routes to chaos, Physica, 7D, p. 73

Libchaber A. and Maurer J. [1978]

Local probe in a Rayleigh-Benard experiment in liquid helium, J. Physique Lettres, 39, p. 369

Lykoudis P. S. [1962]

Natural convection of an electrically conducting fluid in the presence of a magnetic field, Int. J. of Heat and Mass. Transf., 5, pp. 23-34

Lykoudis P. S. and Dunn P. F. [1972]

Magneto-fluid mechanic heat transfer from hot film probes, Int. J. Heat. Mass. Transf., 16, p. 1439

Lykoudis P. S. [1990]

Non-dimensionnal numbers as ratios of characteristic times, Int. J. Heat. Mass. Transf., Vol 33, 7, p. 1568

Manneville P. [1991]

Structures dissipatives, chaos et turbulence, Collection Ales-Saclay

Marwala A. S. and Cusack N. E. [1965]

The absolute thermoelectric power of liquid metals, Phys. Letters., 22, 5, pp.556-556

Moreau R. [1990]

Magnetohydrodynamics, Kluwer Academics Publishers, Fluid Mechanics and its Applications.

Neubrand A. C., Garandet J. P., Moreau R. and Alboassière T. [1995]

Effect of a slight non-uniformity of the magnetic field on MHD convection, Magnetohydrodynamics, T.31, n°1, pp. 3-18

Okada K. and Ozoe H. [1992]

Experimental heat transfer rates of natural convection of molten gallium suppressed under an external magnetic field in either the X, Y, or Z direction, J. of Heat Transfers, Feb., 114, pp. 107-114

Ostrach S. [1988]

Natural convection in enclosures, J of Heat Transf., 110, pp. 1175-1190

Ozoe H. and Maruo E. [1987]

Magnetic and gravitational natural convection of melted silicon - Two-dimensionnal numerical computations for the rate of heat transfer, JSME Int. Journal, 30, n°263, pp. 774-784

Ozoe H. and Okada K. [1989]

The effect of the direction of the external magnetic field on the three-dimensionnal natural convection in a cubical enclosure, Int. J. of Heat and Mass. Transf., 32, n°10, pp. 1939-1954

Pelletier D., Fortin A. and Camarero R. [1989]

Are FEM solutions of incompressible flows really incompressible ? (Or how simple flows can cause headaches !), Int. J. Numer. Meth. Fluids, 9, 99

Pocheau A., Croquette V. and Le Gal P. 1985]

Turbulence in a cylindrical container of argon near threshold of convection, Phys. Rev. Let., Vol. 55, 10, p. 1094

Pool R. E. and Koster J. N. [1994]

Visualization of density fields in liquid metals, Int. J. of Heat and Mass Transf., Tech. Note, 37, 16, pp. 2583-2587

Pratte J. M. and Hart J. E. [1990]

Endwall driven, low Prandtl number convection in a shallow rectangular cavity, J. of Cryst. Growth, 102, p. 54

Robichaud M. P., Tanguy P. A. and Fortin M. [1990]

An iterative implementation of the Uzawa algorithm for 3D fluid flow problems, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 10, 429

Robichaud M. P. [1991]

Une méthode de résolution itérative des équations de Navier-Stokes par la méthode des éléments finis : application à des problèmes tridimensionnels, Thèse Ph.D, Université Laval

Roux J.-C., Simoyi R. H. and Swinney H. L. [1983]

Observation of a strange attractor, Physica, 8D, p.257

Shetcliff J. A. [1979]

Thermoelectric magnetohydrodynamics, J. Fluid. Mech., part. 2, 91, p. 231

Sommeria J. and Moreau R. [1982]

Why, How, and when, MHD turbulence becomes two-dimensionnal, J. Fluid. Mech., 118, p. 507-518

Swinney H. L. [1983]

Observations of order and chaos in non linear systems, Physica, 7D, p. 3

Takeuchi T. and Noguchi S. [1966]

Thermoelectric power of liquid dilute alloys of mercury, J. of the Physical Society of Japan, 21, 11, pp. 2222-2228

Utech H. P. and Flemings M. C. [1966]

Elimination of solute banding in indium antimonide crystals growth crystals, J. Appl. Phys., 37, p. 2021

Vivarat-Perrin M. P. [1995]

Suivez vos procédés à la trace radioactive, Revue Mesures, 673, Mars, pp. 85-88

Wozniak G. and Wozniak K. [1994]

Buoyancy and thermocapillary flow analysis by the combined use of liquid crystal and PIV, Exp. in Fluids, 17, pp. 141-146



AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 30 Mars 1992 relatifs aux Etudes Doctorales

Vu les Rapports de présentations de :

Monsieur Martin COWLEY

Monsieur Hamda BEN HADID

Monsieur Laurent DAVOUST

est autorisé(e) à présenter une thèse en soutenance en vue de l'obtention du diplôme de Docteur de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, spécialité "MECANIQUE DES FLUIDES ET TRANSFERTS".

Fait à Grenoble, le 11/10/99

Pierre GOSSEL
Professeur A.D.G.
Directeur du Collège Doctoral

INPG

